بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات گسسته

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

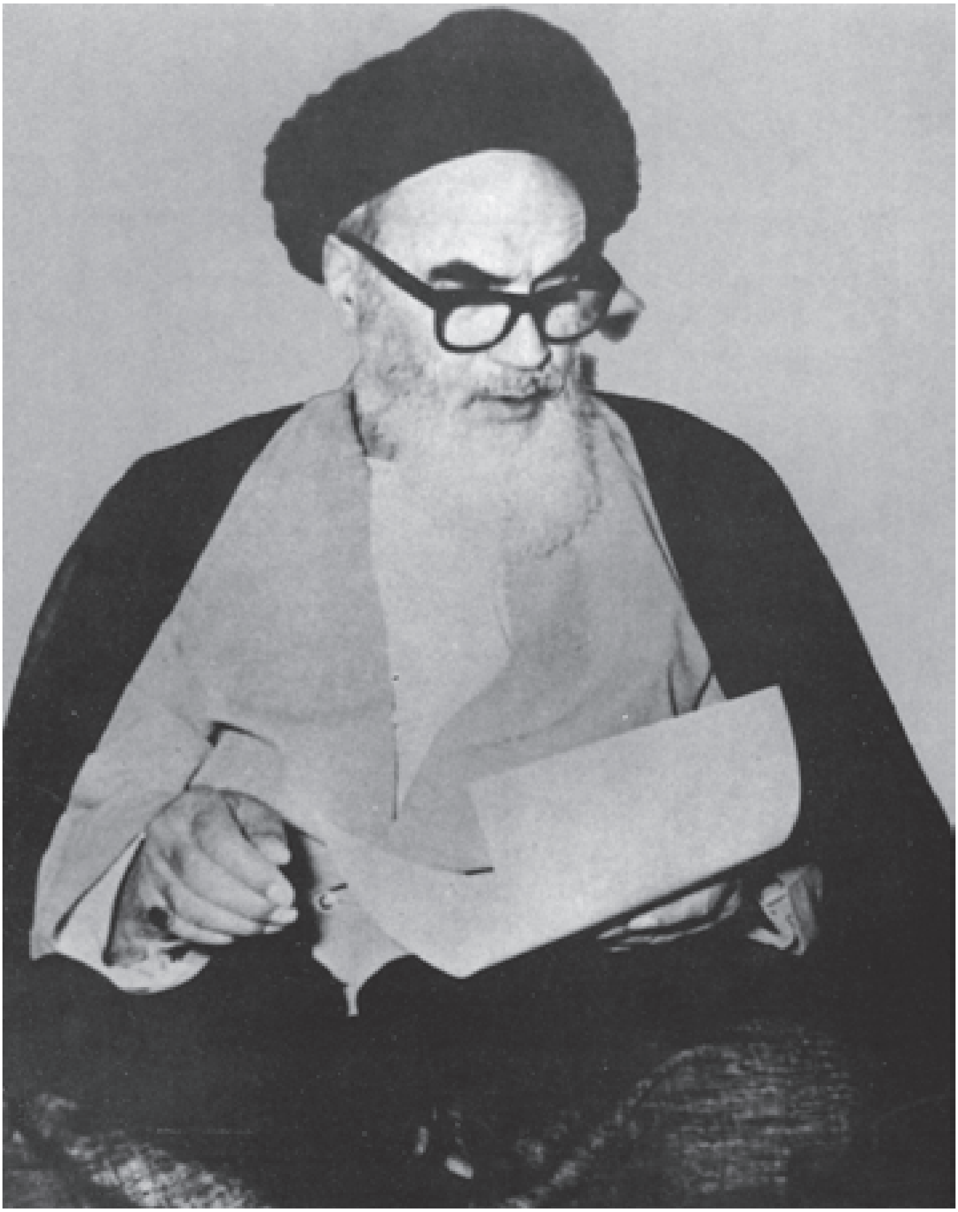
رشتهٔ علوم ریاضی

۱۳۹۱

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی**
نام کتاب : **ریاضیات گسسته ـ ۲۹۶/۱**
شورای برنامه‌ریزی : **دکتر یحیی تابش، دکتر محمّدحسن بیژن‌زاده، دکترامیر نادری، حمیده داریوش‌همدانی و جواد حاجی بابائی**
مؤلفان : **دکتر مهدی بهزاد، دکترعلی رجالی، دکترعلی عمیدی و دکتر عباداللّه محمودیان**
ویراستار : **دکترعلی عمیدی**
آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی**
تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،
وب‌سایت: **www.chap.sch.ir**
صفحه‌آرا : **فائزه محسن‌شیرازی**
طراح جلد : **علیرضا رضائی‌کُر**
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**
تلفن: ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**
سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ هجدهم ۱۳۹۱**

شابک ۴-۰۱۰۳-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-0103-4



اگر شما دیدید که غربی‌ها در صنعت پیشرفتی دارند، اشتباه نشود، خیال نکنید که در فرهنگ هم پیشرفت دارند. جوانان ما ، دانشمندان ما، اساتید دانشگاه‌های ما از غرب نترسند، اراده کنند در مقابل غرب، قیام کنند و نترسند...

امام خمینی

فهرست مطالب

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

پیشگفتار

در سال‌های اخیر به دلیل پیشرفت علوم و تکنولوژی به‌ویژه علوم کامپیوتر، نه تنها به درس‌هایی چون حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) که در حیطه‌ی ریاضیات پیوسته قرار دارد توجه می‌شود، بلکه درس‌ها و کتاب‌های بسیاری تحت عناوینی چون «ریاضیات گسسته»، «ترکیبیات» و «ریاضیات متناهی» ارائه شده‌اند نیز مورد توجه قرار دارند. اغلب این درس‌ها و کتاب‌ها که با مجموعه‌های متناهی وگاه با مجموعه‌های شمارا سروکار دارند، گراف‌ها، روش‌های شمارشی، ساختارهای ترکیبیاتی، مباحثی از نظریه‌ی اعداد و احتمال وکاربردهایی چون کدگذاری و رمزنگاری را شامل‌اند. وجه اشتراک تقریباً همه‌ی این زمینه‌ها گسسته بودن طبیعت مباحث تحت بررسی است که در آن‌ها مفاهیمی چون حد و پیوستگی معمولی کمتر مطرح‌اند، ولی به ابزارهای کارآمد و فوق‌العاده زیبای دیگری مجهزند. پویایی و وجود مسائل فراوانِ حل نشده و ظاهراً ساده از مشخصات دیگر این شاخه‌اند. به‌طورکلی این شاخه امروزه سهم بزرگی در انجام برخی از پژوهش‌های علمی دارد و با توجه به گستردگی زمینه‌های کاربردی آن مورد توجه بسیاری از دانش‌پژوهان است. به این دلایل و به دلیل زیبایی و قدرتی که ریاضیات گسسته در پرورش تفکّر ریاضی افراد دارد مدتی است که آموزش مبانی آن در برنامه‌های درسی دوره‌ی متوسطه بسیاری از کشورها آغاز شده است و محققاً در ایران نیز تدریس آن در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی لازم است.

در این کتاب مؤلفان مطالبی را که جنبه‌ی پایه‌ای و عمومی داشته و صرفاً طبیعتی گسسته دارند مطرح کرده و با ارائه مثال‌های فراوان به روشن شدن مفاهیم افزوده‌اند. برخی از اطلاعات اضافی نیز که جزء برنامه‌ی درسی نیستند به صورت مجله‌ی ریاضی آمده‌اند.

توجه دبیران محترم را به این نکته جلب می‌کند که چون دانش‌آموز دوره‌ی پیش‌دانشگاهی باید خود با مطالعه‌ی شخصی به حل تمرین‌ها و درک مطالب فرعی بپردازد و نیز به دلیل کمی وقت تدریس، نباید انتظار داشت که همه‌ی تمرین‌ها در کلاس مطرح شوند ؛ حل یک مسأله از هر نوع کافی است.

در پایان متذکر می‌شویم که مؤلفان پیشنهادها و نظرهای مفید را با تشکر پذیرا هستند و از همه‌ی استادان، دبیران و دانشجویان به ویژه شرکت‌کنندگان در دوره‌های آموزشی این درس که در تکمیل پیشنویس کتاب راهنمای ما بوده‌اند صمیمانه قدردانی می‌کنند.

قسمت اول

گراف‌ها و کاربردهای آن

مقدمه

در این قسمت که شامل سه فصل است با الفبای نظریه‌ی گراف‌ها وکاربردهایش آشنا می‌شویم. عمدتاً از طبیعت جذاب گراف‌ها استفاده می‌کنیم، شهود را به‌کار می‌بندیم و با مثال‌های ملموس و معماهای گوناگون مفاهیم را روشن می‌سازیم. در عین حال دربست تسلیم شهود نمی‌شویم و در مواردی اثبات دقیق قضایا را ارائه می‌دهیم. گاه از کاربردهایی استفاده می‌کنیم که ممکن است تاحدی بدیهی به نظر برسند، اما هرگز معمّاها و مسائل ظاهراً کوچک را که انگیزه بخش‌اند دست کم نمی‌گیریم، زیرا در موارد بسیاری این‌گونه مسائل سرآغاز ایده‌ها و حتی نظریه‌های مهم ریاضی بوده‌اند. از دانش‌پژوهانی که دوره‌ی دبیرستان را پشت سرگذاشته‌اند انتظار داریم ذهن پویای خود را به کار اندازند و برای پاسخگویی به سؤال‌های عدیده‌ای که خود طرح می‌کنند، یا پرسش‌هایی که در متن مطرح می‌شوند ابتدا مثال‌های ساده و بعد رده‌های خاص گراف‌ها را مورد توجه قرار دهند و مطمئن باشند که در این زمینه می‌توانند مسائلی را مطرح کنند که در عین سادگی بیان، بزرگ‌ترین ریاضیدانان نیز از حل آن‌ها عاجز باشند.

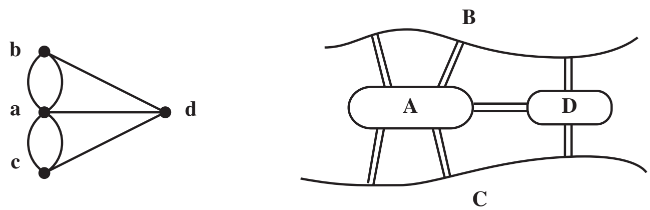
فصل ۱

آشنایی با گراف‌ها

در این فصل با بیان چند مثال زمینه را برای تعریف انواع گراف‌ها آماده می‌کنیم و آن را با ارائه‌ی چند تعریف و قرارداد پایان می‌دهیم.

۱ــ۱ــ چند مثال

در قرن هیجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. معمّای زیر سال‌ها شهروندان را سرگرم کرده بود : آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت، و به مکان اول بازگشت؟ اویلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسأله‌ی پل‌های کونیگسبرگ نظریه‌ی گراف‌ها را بنیان گذاشت. وی به هر یک از این چهار منطقه نقطه‌ای از صفحه را تخصیص داد و به ازای هر پل بین دو منطقه، پاره‌خط یا کمانی بین دو نقطه‌ی متناظر با آن‌ها رسم کرد. بدین ترتیب مطابق شکل ۱ به مدلی ریاضی دست یافت و به سادگی پاسخ معما را که منفی است دریافت.



شکل ۱ــ نمای شهرکونیگسبرگ و گراف مربوط به آن

امروزه این مدل را یک **گراف** یا، به سبب وجود «چند» به اصطلاح خط بین دو نقطه، به‌طور دقیق‌تر یک **گراف چندگانه** می‌نامند. اینک ما هم می‌توانیم مسائل مختلفی را به زبان نظریه‌ی گراف‌ها

بیان کنیم.

مثال ۱: فرض می‌کنیم پنج تیم به نام‌های a، b، c، d و e باید دو به دو با یکدیگر مسابقه بدهند. پس از چندی می‌بینیم که:

a با b، c و e مسابقه داده (و بر همگی پیروز شده است).

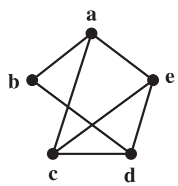
b با a و d روبه‌رو شده (و از هر دو شکست خورده است).

c با a، d و e مسابقه داده (بر d و e پیروز شده و از a شکست خورده است).

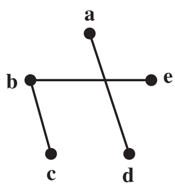
d با b، c و e بازی کرده (و b و e را شکست داده و از c شکست خورده است).

e با a، c و d مسابقه داده است (پیروزی‌ها و شکست‌های e قبلاً مشخص شده‌اند).

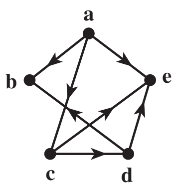
این وضعیت را می‌توانیم به صورت یک نمودار در صفحه مشخص کنیم. به‌ازای هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و دو نقطه را با پاره‌خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم هرگاه تیم‌های متناظر با هم مسابقه داده باشند. شکل ۲ مدل مربوط به این وضعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

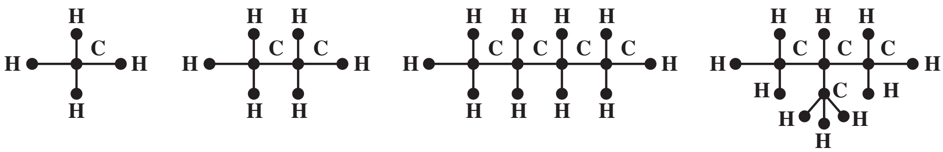
سه شکل مربوط به مثال ۱

ممکن است به این وضعیت نمودار دیگری هم نسبت داد و آن نمودار مربوط به مسابقات انجام نشده است. برای این کار باز هم به‌ازای هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و این بار دو نقطه را با پاره‌خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه دو تیم مربوط با هم بازی نکرده باشند. نمودار مربوط به این وضعیت که در شکل ۳ نمایش داده شده است نشان می‌دهد که برای تکمیل این دور از مسابقات سه مسابقه دیگر باید برگزار شوند.

فرض می‌کنیم که این مسابقات حتماً باید برنده هم داشته باشند. (برندگان را قبلاً مشخص کرده‌ایم.) لذا می‌توانیم هنگام رسم شکل ۲ به جای مثلاً پاره‌خط، پاره‌خطی جهت‌دار رسم کنیم که جهت آن از برنده به سوی بازنده باشد. با این ترتیب شکل ۴ به‌دست می‌آید. این گراف نشان می‌دهد

که مثلاً تیم e از سه تیم a، c و d شکست خورده و هنوز برنده نشده است. چنین گرافی را **گراف جهت‌دار** می‌نامیم. Δ

مثال ۲: در درس شیمی دیده‌ایم که به هیدروکربن‌های اشباع شده نمودارهایی نسبت می‌دهند تا ساختار شیمیایی آن‌ها را به نمایش بگذارند. در شکل ۵ چند نمونه از این هیدروکربن‌ها را که فرمول عمومی آن‌ها C_nH_{2n+2} است می‌بینید.



متان: CH_4 اتان: C_2H_6 بوتان: C_4H_{10} ایزوبوتان: C_4H_{10}

شکل ۵ــ چند نمونه از هیدروکربن‌ها

مثلاً نمودار مربوط به اتان که چگونگی پیوند کربن‌ها و هیدروژن‌ها را نشان می‌دهد ظرفیت کربن و هیدروژن را نیز مشخص می‌کند. در شکل ۵ می‌بینیم که با چهار کربن و ده هیدروژن دو هیدروکربن اشباع شده‌ی «مختلف» وجود دارند. بیش از دو تا چی؟ طبیعتاً پاسخ به این سؤال برای nهای بزرگتر از ۴ آسان نیست. Δ

مثال ۳: شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت A_1، A_2، A_3 و A_4 کارمند استخدام کند. پنج نفر به نام‌های B_1، B_2، B_3، B_4 و B_5 برای تصدی این شغل‌ها داوطلب می‌شوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت تصدی بیش از یک کار را دارند:

B_1 می‌تواند سه شغل A_1، A_2 و A_3 را اداره کند.

B_2 می‌تواند دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

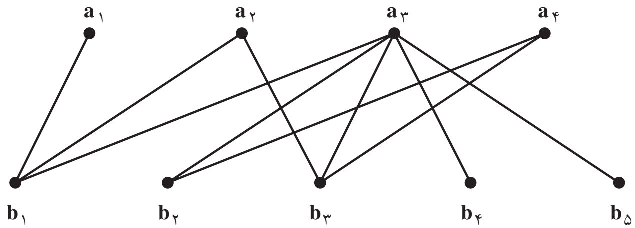
B_3 قادر است هر یک از شغل‌های A_2، A_3 و A_4 را انجام دهد.

B_4 و B_5 هم می‌توانند تنها متصدی شغل A_3 باشند.

آیا با این پنج نفر، شرکت می‌تواند برای پست‌های خالی متصدی پیدا کند؟ این مسأله چند جواب دارد؟

برای بررسی این وضعیت باز هم یک مدل می‌سازیم. به این صورت که در صفحه، چهار نقطه متناظر با چهار شغل موردنظر و پنج نقطه‌ی دیگر متناظر با پنج داوطلب مذکور در نظر می‌گیریم و

مطابق شکل ۶ هر نقطه‌ی b_i ، $1 \le i \le 5$ ، را با پاره‌خط یا پاره‌خط‌هایی به نقاطی چون a_j ، $1 \le j \le 4$ ، در صورتی وصل می‌کنیم که داوطلب B_i که با نقطه‌ی b_i در تناظر است صلاحیت انجام شغل A_j را که با نقطه‌ی a_j در تناظر است داشته باشد.



شکل ۶ــ گراف مربوط به مثال ۳

واضح است که برای تصدی A_1 تنها یک داوطلب وجود دارد و لذا این شغل به B_1 تخصیص داده می‌شود. حال تنها B_3 برای تصدی A_2 باقی می‌ماند. چون B_2 و B_3 تنها داوطلبان احراز پست A_4 هستند و B_3 قبلاً به‌کار A_2 گماشته شده است، A_4 باید الزاماً به B_2 سپرده شود. حال برای تصدی A_3 دو داوطلب باقی می‌مانند : B_4 و B_5 . پس این مسأله تنها دو جواب دارد و شرکت مجبور است B_1 را به‌کار A_1 ، B_3 را به‌کار A_2 ، B_2 را به‌کار A_4 و B_4 یا B_5 را به‌کار A_3 بگمارد. Δ

۱ــ۲ــ چند تعریف و قرارداد

در زندگی پیچیده‌ی امروزی به مسائل فراوانی برمی‌خوریم که برای حل آن‌ها مجبوریم از مدلی ریاضی مانند گراف استفاده کنیم. لذا لازم است این وضعیت‌ها را به صورت مجرد درآوریم و با الهام گرفتن از همین مسائل به بررسی ویژگی‌های این مجردات بپردازیم. نظریه‌ی گراف‌ها به همین ترتیب به‌وجود آمده و به سرعت در حال رشد و شکوفایی است.

همان‌گونه که دیدیم گراف‌ها انواع گوناگون دارند. مثلاً برخی جهت‌دار و برخی چندگانه‌اند. برخی هم نامتناهی‌اند، به این معنا که بی‌نهایت نقطه یا بی‌نهایت خط دارند. اینک در بین انواع گراف‌ها تعریف رسمی ساده‌ترین نوع را ارائه می‌کنیم. در این قسمت تقریباً همه جا سروکار ما با همین گراف‌های (ساده) است.

تعریف: گراف (ساده‌ی) G زوجی مرتب چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. اعضای V را **رأس‌های** G و اعضای E را **یال‌های** G می‌نامیم. مجموعه‌ی رأس‌های G را با V(G) و مجموعه‌ی یال‌های آن را با E(G) هم نمایش می‌دهیم.

به یاد داشته باشید که هر عضو یک مجموعه تنها یک بار در آن ظاهر می‌شود. مثلاً نمی‌نویسیم $\{a,a,a,b,b\}$ بلکه می‌نویسیم $\{a,b\}$.

مثال ۴: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\}\}$ آن‌گاه بنا به تعریف، $G=(V,E)$ گرافی است که پنج رأس و سه یال دارد. Δ

قرار داد: اگر در گراف G، $u,v\in V(G)$ و $\{u,v\}\in E(G)$، برای سادگی، به جای $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv و می‌گوییم در G دو رأس u و v **مجاورند**. در این صورت گاهی گفته می‌شود رأس u (همچنین رأس v) بر یال uv **واقع** است. اصطلاح رایج دیگر این است که در G یال uv از رأس u (همچنین از رأس v) **می‌گذرد** یا **مرور می‌کند**. رأس‌های u و v **دو سریال** uv نام دارند.

مثال ۵: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bd,cd,ce,de\}$ آن‌گاه بنا به تعریف، $G=(V,E)$ گرافی است که پنج رأس و هفت یال دارد. در این گراف مثلاً دو رأس a و b مجاورند زیرا $ab\in E$ ولی دو رأس b و e مجاور نیستند، زیرا $be\notin E$. واضح است که در این گراف از رأس a سه یال و از رأس b دو یال می‌گذرد. Δ

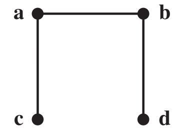
توجه دارید که هر گراف را می‌توان با یک نمودار، موسوم به **نمودار گراف**، نیز نمایش داد. برای این کار به‌ازای هر رأس G نقطه یا دایره‌ی کوچک دلخواهی، مثلاً در صفحه، در نظر می‌گیریم و دو نقطه‌ی متمایز را با پاره خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم به شرطی که مجموعه‌ی متشکل از دو رأس متناظر با آن دو نقطه عضوی از E باشد. یک نمودار گراف مثال ۴ را در شکل ۳ و یک نمودار گراف مثال ۵ را در شکل ۲ نمایش داده‌ایم. شکل ۶ نموداری از گراف $G=(V,E)$ را نمایش می‌دهد که در آن:

$$V=\{a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$$

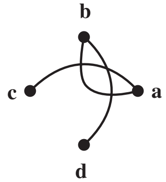
$$E=\{a_1b_1,a_2b_1,a_2b_3,a_3b_1,a_3b_2,a_3b_3,a_3b_4,a_3b_5,a_4b_2,a_4b_3\}$$

در این گراف از رأس a_3 پنج یال مرور می‌کنند؛ ولی از هر یک از دو رأس a_1 و b_5 تنها یک یال می‌گذرد.

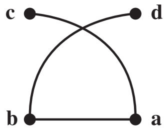
مثال ۶: اگر $V(G)=\{a,b,c,d\}$ و $E(G)=\{ab,ac,bd\}$ آن‌گاه G گرافی است که چهار رأس و سه یال دارد. سه نمودار از این گراف را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



شکل ۷



شکل ۸



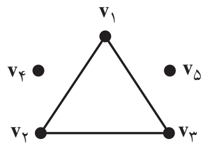
شکل ۹

سه نمودار مربوط به گراف مثال ۶

واضح است که در شکل‌های ۸ و ۹ نقطه‌ی برخورد کمان‌های ac و bd متناظر با هیچ رأس این گراف نیست. Δ

برای راحتی گاهی نمودار گراف را با خود آن یکی می‌گیریم و به همین دلیل رأس را **نقطه** ویال را **خط** هم می‌نامیم. توجه دارید که نمودار گـراف برای درک بهتر مطلب رسم می‌شود و باید حتی‌الامکان ساده باشد.

مثال ۷: فرض کنید گراف G با $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ و $E(G)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_2v_3\}$ داده شده است. آن‌گاه G پنج رأس و سه یال دارد. در این گراف مثلاً رأس v_4 با هیچ رأس دیگر G مجاور نیست. نمودار G به صورت زیر است که سه «بخش جدا از هم» دارد.



شکل ۱۰ــ گراف مربوط به مثال ۷

Δ

مثال ۸: گراف مربوط به بوتان که در شکل ۵ رسم شده است ۱۴ رأس و ۱۳ یال دارد. این گراف تنها یک «بخش» دارد و در آن مثلاً رأسی وجود دارد که دقیقاً با چهار رأس دیگر مجاور است ولی به‌طور مثال رأسی وجود ندارد که دقیقاً با سه رأس دیگر مجاور باشد. Δ

توجه کنید که اگر در تعریف گراف (ساده‌ی) G تغییر کوچکی بدهیم تعریف گراف جهت‌دار به‌دست می‌آید که کاربردهای فراوان دارد.

تعریف: گراف جهت‌دار G زوجی مرتب چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب متشکل از اعضای V است.

می‌توانیم به هر گراف جهتدار هم نموداری نسبت دهیم. به عنوان مثال، اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{(a,b),(a,c),(a,e),(c,d),(c,e),(d,b),(d,e)\}$ آنگاه (V,E) گراف جهت‌داری است که نمودار آن در شکل ۴ نمایش داده شده است. توجه دارید که در یک گراف جهت‌دار به‌ازای هر $u,v\in V$ با شرط $u\neq v$ حداکثر دو به اصطلاح یال جهت‌دار یکی از u به v و دیگری از v به u وجود دارند[۱].

۱ــ۳ــ تمرین‌ها

۱ــ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، $B_۵$ قادر به انجام کار $A_۴$ نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟

۲ــ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، $B_۲$ قادر به انجام کار $A_۲$ نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟ (پاسخ ۴ است.)

۳ــ مسلماً دبیرستان شما در مسابقه‌های زیادی شرکت می‌کند. یکی از مسابقه‌ها را در نظر بگیرید ودر پایان گراف یا گراف جهت‌دار مربوط به آن را مشخص کنید.

۴ــ گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_۱,v_۲,v_۳,v_۴,v_۵,v_۶,v_۷\}$ و $E=\{v_۱v_۲,v_۱v_۴,v_۲v_۳,v_۲v_۴,v_۳v_۴,v_۵v_۶\}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

پ) این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟ (پاسخ ۳ است.)

۵ــ در زبان عربی کلمه‌ی «شجر» به معنای درخت است و درخت گراف خاصی است که بعداً در فصل ۳ بررسی خواهد شد. درباره‌ی ارتباط بین «شجره نامه‌ی خانوادگی» و گراف‌ها چه می‌دانید؟ شجره‌نامه‌ی خانوادگی خود را رسم کنید.

۱ــ در تعریف گراف جهت‌دار بسیاری از مؤلفان E را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب متشکل از اعضای متمایز V می‌گیرند. بدانید که با این شرط مثلاً با ۲ رأس ۳ و با ۸ رأس ۱،۷۹۳،۳۵۹،۱۹۲،۸۴۸ گراف جهت‌دار «متفاوت» وجود دارند!

۶ــ شش بازه‌ی باز (۶,۹),(۳,۸),(۳,۴),(۲,۵),(۱,۴),(۰,۲) از اعداد حقیقی داده شده‌اند. با این بازه‌ها گرافی چون G می‌سازیم که رأس‌هایش متناظر با این بازه‌ها باشند و دو رأس G با این شرط مجاور باشند که بازه‌های مربوط متمایز باشند و اشتراک آن‌ها تهی نباشد. مثلاً چون اشتراک بازه‌های (۰,۲) و (۱,۴) تهی نیست رأس‌های مربوط باید مجاور باشند. اما چون اشتراک بازه‌های (۰,۲) و (۲,۵) تهی است رأس‌های مربوط به این دو بازه نباید مجاور باشند. (چنین گرافی را **گراف بازه‌ها** می‌نامیم.)

الف) نمودار گراف بازه‌های داده شده را رسم کنید.

ب) با معرفی پنج بازه‌ی مناسب نشان دهید گراف شکل ۳ را می‌توان گراف بازه‌ها دانست.

پ) نشان دهید گراف شکل ۲ نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد؛ یعنی، پنج بازه‌ی باز نمی‌توان یافت که گراف مربوط به آن‌ها، طبق تعریف، «همان» گراف شکل ۲ باشد.

توجه: گراف‌هایی که از بازه‌ها به‌دست می‌آیند در باستان‌شناسی، ژنتیک و در تحلیل ادبی کاربرد دارند. درک عمیق این کاربردها مستلزم آگاهی از زمینه‌های مربوط است.

مجله‌ی ریاضی

می‌گویند در روزگاران پیش نقشه‌کش‌ها از این «واقعیت» آگاه بودند که هر نقشه‌ی جغرافیایی مسطح یا کروی را می‌توان با حداکثر چهاررنگ طوری رنگ کرد که مناطق «مجاور» رنگ‌های متفاوت داشته باشند. شاید هم **مسأله‌ی چهاررنگ** از تراوشات ذهن ریاضیدانان باشد. به هر تقدیر، نخستین مرجع مکتوب این مسأله نامه‌ی مورخ ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ میلادی اِ. دمورگن به ویلیام همیلتن است. مسأله‌ی چهاررنگ که به «مرض» چهاررنگ هم شهرت یافت بیش از یک قرن به‌طور جدی ذهن بسیاری را به خود مشغول داشت ودر نظریه‌ی گراف‌ها معادل‌های بسیاری برای آن مطرح شد.

سرانجام در سال ۱۹۷۷ میلادی ک. اَپِل وو. هَکِن با استفاده از قضیه‌های فراوان و ۱۲۰۰ ساعت از وقت یکی از سریعترین کامپیوترهای زمان این مسأله‌ی سرکش رامهار و «قضیه‌ی» چهاررنگ را «ثابت» کردند. اما، هنوز هم مرض چهاررنگ شیوع دارد و بسیاری به فکر ارائه‌ی اثباتی سنتی و حتی‌الامکان ساده برای آن هستند.

فصل ۲

چند ویژگی ساده و چند رده‌ی خاص گراف‌ها

در این فصل ابتدا چند ویژگی ساده از گراف‌ها را ذکر می‌کنیم و سپس برای آشنایی بیشتر با گراف‌ها به معرفی چند رده‌ی خاص از آن‌ها می‌پردازیم و باز هم می‌کوشیم به‌طور شهودی مفاهیم را روشن کنیم.

۲ــ۱ــ مرتبه، اندازه و درجه

می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای p، $p \in \mathbb{N}$ ، عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن $p(p-۱)/۲$ است که با $\binom{p}{۲}$ نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر گرافی p رأس و q یال داشته باشد داریم :

$$\circ \le q \le \binom{p}{۲} = p(p-۱)/۲$$

تعریف: در هر گراف $G=(V,E)$ تعداد اعضای مجموعه‌ی V را **مرتبه‌ی** G و تعداد اعضای مجموعه‌ی E را **اندازه‌ی** G می‌نامیم و معمولاً آن‌ها را، به ترتیب، با p و q نمایش می‌دهیم. مرتبه‌ی G را با $p(G)$ و اندازه‌ی آن را با $q(G)$ هم نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: مرتبه‌ی گراف شکل ۲ از فصل ۱ پنج و اندازه‌ی آن هفت است. مرتبه‌ی گراف مربوط به مثلاً بوتان (شکل ۵ از فصل ۱) ۱۴ و اندازه‌ی آن ۱۳ است. توجه کنید که در مورد سایر گراف‌های این شکل نیز رابطه‌ی $p=q+۱$ برقرار است. Δ

تعریف: درجه‌ی رأس v از گراف G برابر با تعداد یال‌هایی از G است که از رأس v می‌گذرند. این عدد را با $\deg_G v$ و گاهی به‌طور ساده با $\deg v$ نمایش می‌دهیم. اگر $\deg v$ یک عدد فرد باشد v را یک **رأس فرد** و اگر یک عدد زوج باشد v را یک **رأس زوج** از گراف G می‌نامیم.

مثال ۲: در شکل ۲ از فصل ۱ داریم: $\deg a = ۳$ و $\deg b = ۲$. این گراف چهار رأس فرد و یک رأس زوج دارد. در شکل ۶ از فصل ۱ داریم: $\deg a_۱ = ۱$ و $\deg a_۳ = ۵$. این گراف شش رأس فرد و سه رأس زوج دارد. توجه کنید که در هر دو مثال مجموع درجه‌های تمام رأس‌ها یک عدد زوج است. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم این مطلب همواره درست است. Δ

قضیه‌ی ۱: اگر $V = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_p\}$ مجموعه‌ی رأس‌های گراف G با اندازه‌ی q باشد، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$.

اثبات: هر یال تنها دو سر دارد، یعنی دقیقاً از دو رأس G می‌گذرد و لذا در طرف چپ فرمول بالا هر یال دو بار به حساب می‌آید. $\square$

توجه کنید درجه‌ی هر رأس گرافی که اصلاً یال نداشته باشد صفر است. لذا، در این حالت هر دو طرف برابری مذکور در قضیه‌ی ۱ صفر به حساب می‌آیند.

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

اثبات: مجموع جمع‌وندهای (یعنی مجموع عامل‌های) زوج عبارت $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i$ را با A و مجموع جمع‌وندهای فرد آن را با B نمایش می‌دهیم. پس داریم $۲q = \sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = A + B$. عدد A زوج است، زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج همواره زوج است. در نتیجه $B = ۲q - A$ نیز زوج است. بنابراین تعداد جمع‌وندهای B، یعنی تعداد رأس‌های فرد گراف، باید زوج باشد. $\square$

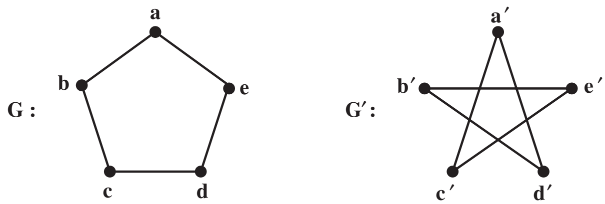
تعریف: بزرگترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **ماکسیمم درجه‌ی** G می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ یا به‌طور ساده با Δ نمایش می‌دهیم. کوچکترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **مینیمم درجه‌ی** G می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ یا به‌طور ساده با δ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳: در شکل ۶ از فصل ۱ داریم: $\Delta = ۵$ و $\delta = ۱$. در تمام گراف‌های مربوط به هیدروکربن‌ها $\Delta = ۴$ و $\delta = ۱$. Δ

۲ــ۲ــ گراف‌های منتظم، کامل و تهی

تعریف: عدد صحیح و نامنفی r داده شده است. گراف G از مرتبه‌ی p را r ـ **منتظم** می‌نامیم هرگاه درجه‌ی هررأس G برابر با r باشد، هر گراف $(p-1)$ ـ منتظم از مرتبه‌ی p را **گراف کامل** هم می‌نامیم و آن را با K_p نمایش می‌دهیم.

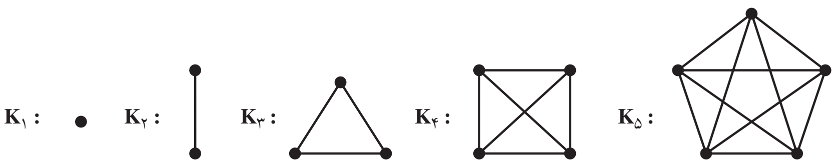
مثال ۴: هر یک از دو گراف شکل ۱، دو ـ منتظم است ولی چون در این دو مثال $p=5$ و $p-1=4 \neq 2$ این دو گراف کامل نیستند. توجه کنید که در گراف کامل G از مرتبه‌ی p درجه‌ی هر رأس $p-1$ است و لذا به‌ازای هر $u,v \in V(G)$، $u \neq v$ داریم $uv \in E(G)$.



شکل ۱ــ گراف‌های ۲ــ منتظم

Δ

مثال ۵: در شکل زیر پنج گراف کامل K_p، $1 \leq p \leq 5$، رسم شده‌اند. در مورد هر یک از این مثال‌ها دیده می‌شود که تعداد یال‌های K_p برابر با $p(p-1)/2$ است.



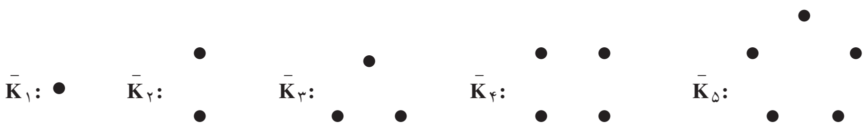
شکل ۲ــ گراف‌های کامل از مرتبه‌های ۱ تا ۵

Δ

قضیه‌ی ۲: تعداد یال‌های گراف کامل K_p، $p \in \mathbb{N}$ برابر با $p(p-1)/2$ است.

اثبات: مجموع درجه‌های رأس‌های گراف K_p برابر با $p(p-1)$ است. پس، بنابر قضیه‌ی ۱، نصف این عدد برابر با $q(K_p)$ است. □

قرارداد: گراف ۰ ــ منتظم از مرتبه‌ی p را با $\bar{K}_p$ نمایش می‌دهیم. چون $\bar{K}_p$ هیچ یال ندارد، یعنی $E(\bar{K}_p)=\varnothing$ ، این گراف را **گراف تهی** هم می‌نامیم. گراف‌های تهی با p رأس، $1 \le p \le 5$، را در شکل ۳ می‌بینید.



شکل ۳ــ گراف‌های تهی از مرتبه‌های ۱ تا ۵

۲ــ۳ــ مسیر گراف و دورگراف

تعریف: اگـر u و v دو رأس متفاوت از گـراف دلـخواه G باشند، **یک مسیر** از u به v از **گراف** G دنباله‌ای متشکل از $m+1$ ، $m \in \mathbb{N}$ رأس دو بـه دو متفاوت G است کـه از u آغاز و به v ختم می‌شود و هـر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را **طــول** این **مسیر از گراف** G می‌نامیم. می‌پذیریم که دنباله‌ی متشکل از تنها یک رأس v یک **مسیر با طول صفر** از v به v از گراف G باشد.

در واقع یک مسیر از رأس u به رأس v از گراف G را به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که با در نظر گرفتن نموداری از G ابتدا u را یادداشت می‌کنیم ؛ از یک یال مارّ بر u (در صورت وجود) می‌گذریم و الزاماً به رأسی تازه می‌رسیم و آن را به عنوان دومین عضو دنباله یادداشت می‌کنیم. از آن‌جا یالی تازه از G را برمی‌گزینیم و از آن به رأس سومی می‌رسیم که آن را نیز یادداشت می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم تا در صورت امکان پس از گذشتن از m یال دوبه‌دو متفاوت، $m \ge 0$ ، به v برسیم. در پایان v را نیز یادداشت می‌کنیم. رأس‌هایی را که یادداشت کرده‌ایم دنباله‌ای است که یک مسیر از u به v از گراف G را به‌دست می‌دهد.

مثال ۶: در شکل ۲ از فصل ۱ از a به b پنج مسیر وجود دارند. در این گراف مثلاً

a,b   a,c,d,b   a,c,e,d,b

سه مسیر متفاوت با طول، به ترتیب از چپ به راست، ۱، ۳، و ۴ از رأس a به رأس b هستند.

(دو مسیر دیگر از a به b را بنویسید و طول آن‌ها را مشخص کنید.) Δ

واضح است که اگر در گرافی از u به v مسیری وجود داشته باشد در آن گراف از رأس v به u هم مسیری وجود دارد. لذا وجود یا عدم وجود مسیر «بین» دو رأس گراف معنی دارد.

تعریف: گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. در غیر این صورت G را **ناهمبند** می‌نامیم.

مثال ۷: گراف شکل ۲ از فصل ۱ همبند است. ولی گراف شکل ۳ از فصل ۱ و گراف تهی $\bar{K}_p$، $p \geq ۲$، همبند نیستند. البته $\bar{K}_۱$ نیز همبند است. به مثال ۷ از فصل ۱ بازگردید. گفتیم که این گراف از سه «بخش جدا از هم» تشکیل شده است. این گراف ناهمبند است زیرا مثلاً بین دو رأس $v_۱$ و $v_۴$ مسیری وجود ندارد. Δ

تعریف: یک **دور از گراف** G دنباله‌ای چون $v_۱, v_۲, \ldots, v_m, v_{m+۱} = v_۱$ با شرط $m \geq ۳$ متشکل از $m+۱$ رأس G است که در آن v_i ها، $۱ \leq i \leq m$، دوبه‌دو متمایزند و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را **طول** این **دور از گراف** G می‌نامند.

مثال ۸: هیچ یک از گراف‌های شکل ۵ از فصل ۱ دور ندارد. همچنین گراف تهی $\bar{K}_p$ دور ندارد. ولی به‌ازای هر $p \geq ۳$ گراف کامل K_p دور دارد. در واقع، به ازای هر عدد طبیعی n، $۳ \leq n \leq p$، گراف K_p دوری به طول n دارد. گراف شکل ۶ از فصل ۱ دوری ندارد که طولش فرد باشد ولی دوری به طول ۴ (دنباله‌ی $b_۲, a_۳, b_۳, a_۴, b_۲$) و دوری به طول ۶ (دنباله‌ی $b_۱, a_۲, b_۳, a_۴, b_۲, a_۳, b_۱$) دارد. Δ

۲ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ فرض کنید گراف G، ۳ ــ منتظم است وداریم $q = ۲p - ۳$. مرتبه‌ی G با p و اندازه‌ی آن با q نمایش داده شده است.

الف) ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید.

ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها راداشته باشد.

پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

۲ــ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای p، q، Δ و δ را بیابید.

ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون $s: d_۱, d_۲, \cdots, d_۹$ بنویسید که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۸$ داشته باشیم $d_{i+۱} \leq d_i$. (دنباله‌ی حاصل را **دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های**

گراف می‌نامیم.)

پ) چرا گرافی وجود ندارد که S:۵,۳,۳,۱,۰ دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های آن باشد؟

۳ــ الف) گرافی ارائه کنید که دنباله‌ی درجه‌های رأس‌هایش S:۲,۳,۳,۳,۲,۲,۲,۰,۰,۰ باشد.

ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

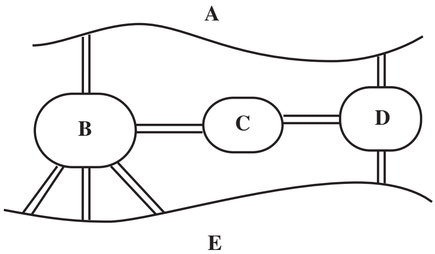
۴ــ چند گراف ۳ــ منتظم از مرتبه‌ی ۱۵ وجود دارند؟ چرا؟

۵ــ با استقراء بر q قضیه‌ی ۱ را اثبات کنید.

۶ــ گرافی ناهمبند و ۳ــ منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۷ــ گرافی همبند و ۳ــ منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۸ــ فرض کنید طبق شکل، شهری از یک رودخانه و پنج منطقه‌ی A، B، C، D و E تشکیل شده است و این منطقه‌ها با هشت پل به هم راه دارند.



الف) گراف چندگانه‌ی مربوط به این شهر را رسم کنید.

ب) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه و عبور از پل‌ها می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقه‌ی آغاز بازگشت؟

پ) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقه‌ی آغاز گشت با منطقه‌ی پایان آن یکی باشد.

۹ــ در گراف کامل K_p ، $۲ \leq p \leq ۴$ ، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v، $u \neq v$ ، را بیابید.

۱۰ــ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ «چند» دور دارد؟(پاسخ ۳ است : دو دور از مرتبه‌ی ۴ و یک دور از مرتبه‌ی ۶. پاسخ را توجیه کنید.)

ب) هر یک از دورها را به صورت دنباله‌ای از رأس‌ها نمایش دهید که رأس اول و آخر دنباله مثل هم و بقیه همراه با این رأس مشترک دو به دو متفاوت باشند ؛ به علاوه، هر دو رأس متوالی این

دنباله در G مجاور باشند.

راهنمایی. یکی از دورهای G را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت :

$$b_۱, a_۳, b_۳, a_۲, b_۱ \qquad b_۱, a_۲, b_۳, a_۳, b_۱$$
$$a_۲, b_۱, a_۳, b_۳, a_۲ \qquad a_۲, b_۳, a_۳, b_۱, a_۲$$
$$b_۳, a_۲, b_۱, a_۳, b_۳ \qquad b_۳, a_۳, b_۱, a_۲, b_۳$$
$$a_۳, b_۳, a_۲, b_۱, a_۳ \qquad a_۳, b_۱, a_۲, b_۳, a_۳$$

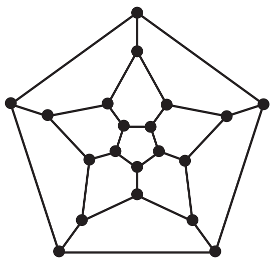
۱۱ــ هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

۱۲ــ اگر گراف G از مرتبه‌ی p، $p \geq ۳$ ، دوری از مرتبه‌ی p داشته باشد، آن‌گاه G را **گراف هَمیلْتنی** می‌نامیم. مثلاً هر K_p ، $p \geq ۳$ ، گراف همیلتنی است.

الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

ب) اگر G همیلتنی باشد آن‌گاه به ازای هر $v \in V(G)$ داریم $\deg_G v \geq ۲$.

پ) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



۱۳ــ الف) گراف G داده شده است. فرض کنید $u, v \in V(G)$ نشان دهید «وجود یک مسیر از u به v» یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر مجموعه‌ی $V(G)$ است.

ب) اگر G گراف شکل ۳ از فصل ۱ باشد، افرازهای حاصل از رابطه‌ی هم‌ارزی مذکور در بند (الف) را بیابید.

پ) پاسخ بند (ب) را با فرض این‌که G گراف شکل ۶ یا گراف شکل ۱۰ باشد بیابید.

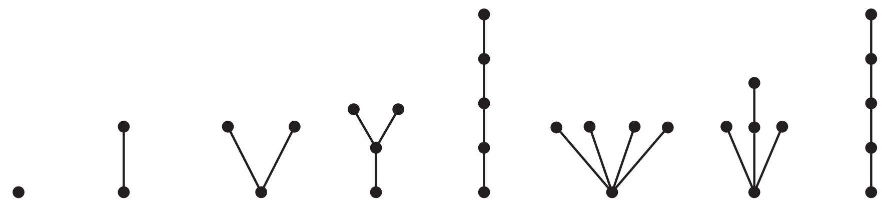
فصل ۳

درخت و ماتریس

در این فصل کوتاه ابتدا رده‌ی خاص دیگری از گراف‌ها موسوم به درخت‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. سرانجام به هر گراف یک ماتریس نسبت می‌دهیم و نشان می‌دهیم که هر گراف را می‌توان با یک ماتریس بسیارخاص نیز نمایش داد.

۳ـ۱ـ درخت

گراف‌همبندی را که هیچ دور نداشته باشد **درخت** می‌نامیم. گراف‌های K_1 و K_2 درخت‌اند و به ترتیب «تنها» درخت‌های با یک و دو رأس هستند. در شکل ۱ تمام درخت‌های از مرتبه‌ی p، $1 \le p \le 5$، را رسم کرده‌ایم.



شکل ۱ـ درخت‌های از مرتبه‌ی ۱ تا ۵

گراف مربوط به هر هیدروکربن C_nH_{2n+2} نیز یک درخت است. می‌بینیم که در هر یک از این مثال‌ها بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این مطلب همواره درست است.

قضیه‌ی ۱ـ بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

اثبات: اثبات در حالتی که دو رأس متمایز نباشند واضح است. فرض کنید u و v دو رأس

متمایز درختی چون G باشند. چون G همبند است بین u و v دست کم یک مسیر وجود دارد. اگر در G دو مسیر مختلف (در واقع دو دنباله‌ی مختلف از رأس‌های متمایز G) از u به v وجود داشته باشند، آن‌گاه این دو مسیر مختلف «ایجاب» می‌کنند که دوری در G وجود داشته باشد. پس G درخت نیست و این، یک تناقض است. □

مطلب دیگری که از درخت‌های شکل ۱ برمی‌آید این است که، به‌جز K_1 ، هر یک دست‌کم دو رأس از مرتبه‌ی یک دارد. این مطلب نیز همواره درست است.

قضیه‌ی ۲: هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد دست‌کم دو رأس از درجه‌ی یک دارد.

اثبات: از به اصطلاح استقرای تعمیم یافته روی مرتبه‌ی درخت G استفاده می‌کنیم. اگر $p = 2$ آن‌گاه $G = K_2$ و درستی حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم در مورد هر درخت با $k \geq 2$ رأس درست است. سپس درختی چون G از مرتبه‌ی $k+1$ را در نظر می‌گیریم. اگر G رأسی چون v از درجه‌ی یک داشته باشد آن‌گاه با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن گرافی مانند G' به‌دست می‌آوریم که درخت است و $k \geq 2$ رأس دارد. پس بنا به فرض استقراء، G' و در نتیجه G دست‌کم دو رأس از درجه‌ی یک دارد. پس فرض می‌کنیم درجه‌ی هیچ رأسی از G از دو کمتر نباشد. در این صورت رأسی چون u از G را در نظر می‌گیریم. با آغاز از u و انتخاب یالی از G که از u می‌گذرد مسیری چون P را به این ترتیب می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأسی تازه یالی از G را در پیش می‌گیریم که اولاً از آن رأس بگذرد، ثانیاً قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد، و ثالثاً انتهای دیگر آن رأسی تازه‌تر از G باشد. این کار باید در جایی متوقف شود. چون درجه‌ی هر رأس دست‌کم دو است توقف آن با رسیدن به یکی از رأس‌های قبل میسر است و لذا دوری در G به‌وجود می‌آید. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند. □

به مثال‌های گوناگون درخت‌ها نظر افکنید، می‌بینید که در مورد تمام آن‌ها قضیه‌ی زیر درست است.

قضیه‌ی ۳: اگر G درختی با p رأس و q یال باشد آن‌گاه

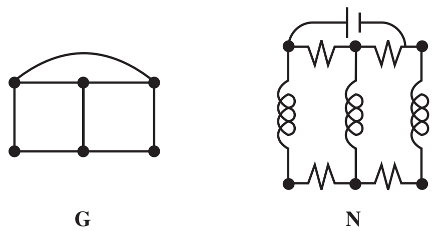
$$p = q + 1.$$

اثبات: با استقراء بر p قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $p = 1$ آن‌گاه $q = 0$ و داریم $p = q + 1$. فرض کنید قضیه درمورد هر درختی با k، $k \geq 1$ ، رأس درست باشد. حال درختی چون G را در نظر می‌گیریم که $k+1$ رأس دارد. باید نشان دهیم تعداد یال‌های آن k است. بنا به قضیه‌ی قبل G رأسی

چون v دارد که $\deg v = ۱$. با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن درختی چون G' ایجاد می‌شود که مرتبه‌اش k است. بنابه فرض استقراء، گراف G' دارای $k-۱$ یال است. پس درخت G دقیقاً k یال دارد. □

مجله‌ی ریاضی

درخت در رشته‌های مختلفی مانند شیمی، مهندسی برق، و علم محاسبه کاربرد دارد. کرشهف در سال ۱۸۴۷ میلادی هنگام حل دستگاه‌های معادلات خطی مربوط به شبکه‌های الکتریکی درخت‌ها را کشف، و نظریه‌ی درخت‌ها را بارور کرد. در شکل زیر N یک شبکه‌ی الکتریکی و G گراف مربوط به آن است.



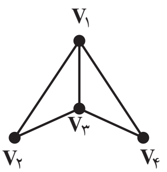
کِیلی در سال ۱۸۵۷ میلادی درخت‌ها را در ارتباط با شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربن‌ها کشف کرد. وقتی مثلاً می‌گوییم دو ایزومر مختلف $C_۴H_{۱۰}$ وجود دارند منظورمان این است که دو درخت «متفاوت» با ۱۴ رأس وجود دارند که درجه‌ی ۴ رأس از این ۱۴ رأس چهار و درجه‌ی هر یک از ۱۰ رأس باقیمانده یک است.

اگر هزینه‌ی کشیدن مثلاً راه‌آهن بین هر دو شهر از p شهر مفروض مشخص باشد ارزان‌ترین شبکه‌ای که این p شهر را به هم وصل می‌کند با مفهوم یک درخت از مرتبه‌ی p ارتباط نزدیک دارد. به‌جای مسأله‌ی مربوط به راه‌آهن می‌توان وضعیت مربوط به شبکه‌های برق‌رسانی، لوله‌کشی نفت، لوله‌کشی گاز، و ایجاد کانال‌های آبرسانی را در نظر گرفت. برای تعیین یک شبکه با نازل‌ترین هزینه از قاعده‌ای به نام **الگوریتم صرفه‌جویی** استفاده می‌شود که کاربردهای فراوان دارد.

۳ــ۲ــ گراف‌ها و ماتریس‌ها

گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ و $E=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_3,v_3v_4\}$ را که در شکل ۲ رسم شده است در نظر بگیرید. به این گراف ماتریسی 4×4 چون $A=(a_{ij})$ به شرح زیر نسبت می‌دهیم. در مقابل چهار سطر و چهار ستون این ماتریس طبق شکل ۲ می‌نویسیم v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 . درایه‌ی a_{ij} از این ماتریس ۱ است هر گاه $v_iv_j \in E$ و ۰ است هر گاه $v_iv_j \notin E$.

G :



$$A:\ \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

شکل ۲ــ گراف و ماتریس مجاورت آن

توجه کنید که :

(۱) درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند زیرا گراف‌های (ساده‌ی) موضوع بحث ما «طوقه» ندارند، یعنی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست.

(۲) تعداد سطرهای این ماتریس برابر است با تعداد ستون‌های آن، یعنی ماتریس A مربعی است.

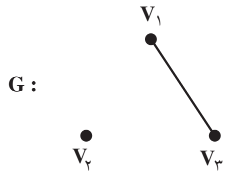
(۳) هر درایه‌ی ماتریس A یا صفر است یا یک، یعنی همواره $a_{ij}\in\{0,1\}$.

(۴) ماتریس A متقارن است، یعنی همواره $a_{ij}=a_{ji}$ ، زیرا اگر $v_iv_j\in E$ آن‌گاه $v_jv_i\in E$.

واضح است که به هر گراف دلخواه G همواره می‌توان ماتریسی چون A با ویژگی‌های چهارگانه بالا نسبت داد. این ماتریس را **ماتریس مجاورت گراف** G می‌نامیم و آن را با $A(G)$ یا به‌طور ساده با A نمایش می‌دهیم.

جالب این‌جاست که به هر ماتریس با ویژگی‌های چهارگانه بالا می‌توان یک گراف نسبت داد. مثلاً اگر ماتریس A از شکل ۳ را به ما بدهند فوراً می‌توانیم گراف G از همین شکل را به آن نسبت دهیم. برای این کار به‌ازای سطر (یا ستون) اول ماتریس نقطه‌ای چون v_1 ، به ازای سطر (یا ستون) دوم ماتریس نقطه‌ای چون v_2 و همین‌طور به ازای سطر (یا ستون) سوم نقطه‌ی دیگر v_3 را در نظر

می‌گیریم و نقطه‌ی v_i را به نقطه‌ی v_j با خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه درایه‌ی مربوط در ماتریس داده شده یک باشد و در غیر این صورت آن دو را به هم وصل نمی‌کنیم.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل ۳ــ ماتریس با شرایط چهارگانه‌ی بالا و گراف آن

پس می‌بینیم که یک گراف با p رأس در واقع چیزی جز یک ماتریس مربعی $p \times p$ با شرایط چهارگانه‌ی بالا نیست. و لذا برای مطالعه‌ی گراف‌ها می‌توان صرفاً ماتریس‌های مربعی متقارنی را مطالعه کرد که درایه‌های آن‌ها از مجموعه‌ی $\{0,1\}$ انتخاب می‌شوند و درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها صفرند. بنابراین نظریه‌ی گراف‌ها را می‌توان شاخه‌ای از جبر هم تلقی کرد.

قضیه‌ی ۴: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G با $V(G) = \{v_1, \cdots, v_p\}$ باشد. آن‌گاه درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس A^2 برابر است با درجه‌ی رأس v_i در گراف G.

اثبات: درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس A^2 برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و ستون iام A. چون A متقارن است این درایه از حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و سطر iام A حاصل می‌شود. تعداد یک‌های موجود در سطر iام A برابر است با درجه‌ی رأس v_i و لذا برای محاسبه‌ی درایه‌ی موردنظر از ماتریس A^2 باید به اندازه‌ی $\deg v_i$ عدد $1 \times 1 = 1$ را با هم جمع کنیم. □

۳ــ۳ــ تمرین‌ها

۱ــ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۸ باشد.

۲ــ گراف همبندی معرفی کنید که حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه‌ی آن ۲۰ باشد.

۳ــ فرض کنید ماکسیمم درجه‌ی یک درخت T برابر با k باشد. ثابت کنید که T دست‌کم k رأس از درجه‌ی یک دارد.

۴ــ گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۶ معرفی کنید که ۲– منتظم باشد.

۵ـ تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۶ را رسم کنید.

۶ـ دو ماتریس M_1 و M_2 به صورت زیر داده شده‌اند.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آن را که معرف یک گراف است مشخص کنید و نمودار آن را بکشید.

۷ـ اگر ماتریس مجاورت گراف K_p ، $p \in \mathbb{N}$ ، را با M نمایش دهیم نشان دهید هر درایه‌ی واقع بر روی قطراصلی ماتریس M^2 برابر با $p-1$ است.

۸ـ الف) قضیه‌ی ۱ را با استفاده از استقراء روی مرتبه‌ی یک درخت و با به کار بردن قضیه‌ی ۲ ثابت کنید.

ب) اثباتی را که در متن برای قضیه‌ی ۱ ارائه شده است با اثباتی که طبق بند (الف) این تمرین به‌دست می‌آید مقایسه کنید وبا ذکر دلیل به پرسش‌های زیر پاسخ دهید :

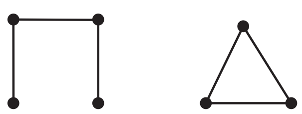
ـ کدام اثبات شهودی‌تر است؟

ـ کدام اثبات «دقیق‌تر» است؟

ـ کدام اثبات را بیشتر می‌پسندید؟

۹ـ الف) در شکل زیر یک گراف ناهمبند G رسم شده است. رأس‌های G را با v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7 چنان برچسب بزنید که ناهمبند بودن G از ماتریس مجاورت آن آشکار باشد.

G :



ب) اگر این فکر را در مورد یک گراف ناهمبند و دلخواه G به کار بریم ماتریس مجاورتش چه صورتی خواهد داشت؟

۱۰ـ الف) با توجه به تعریف ماتریس مجاورت گراف (ساده) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را تعریف کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۴ از فصل ۱ را بنویسید.

۱۱ــ گراف همبند G داده شده است. اگر $u, v \in V(G)$ فاصله‌ی u از v در G که با $d(u, v)$ نمایش داده می‌شود برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v در G. نشان دهید :

الف) $d(u, v) = ۰$ اگر و تنها اگر $u = v$.

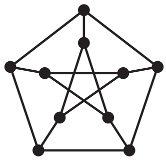
ب) به ازای هر $u, v \in V(G)$ داریم $d(u, v) = d(v, u)$.

پ) به ازای هر $u, v, w \in V(G)$ داریم $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

۱۲ــ گراف زیر موسوم به **گراف پِتِرسِن** را در نظر بگیرید.

الف) در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هر یک از اعداد ۵، ۶، ۸، و ۹ باشد.

ب) آیا این گراف هَمیلتِنی است؟ چرا؟



مراجع

1 ــ M.Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Wadsworth International Group, Belmont, Galif. 1979.

2 ــ O. Ore, and R. J . Wilson , Graphs and their Uses , The Mathematical Association of America, 1990. [۱]

۱ــ مرکز نشر دانشگاهی ترجمه‌ی فارسی این مرجع را منتشر خواهد کرد.

قسمت دوم

نظریه‌ی اعداد

مقدمه

نظریه‌ی اعداد یکی از شاخه‌های زیبا و جالب ریاضی است که ریشه در تاریخ بشر دارد و به دلیل زیبایی و کارایی همواره مورد علاقه بوده است. پیشرفت‌های علوم دیگر مانند کامپیوتر و رمزنگاری که تکیه بر نظریه‌ی مقدماتی اعداد دارند، به شادابی و زنده بودن این شاخه از دانش بشری کمک کرده‌اند.

در این قسمت مباحثی مقدماتی از نظریه‌ی اعداد را ارائه می‌دهیم و انتظار داریم دانش‌آموزان عزیز با توجه به محتوای غنی این رشته و نیز تأثیر مثبت حل مسائل آن در جهت تقویت تفکّر ریاضی، مسائلی جالب از نظریه‌ی اعداد را انتخاب و حل کنند.

فصل ۴

کلیّات و تقسیم‌پذیری

۴ــ۱ــ برخی از اصول نظریه‌ی اعداد

نظریه‌ی اعداد شاخه‌ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی

$$۱,۲,۳,\cdots$$

می‌پردازد. در مورد چگونگی به‌وجود آمدن اعداد طبیعی اطلاع درستی در دست نیست، اما شواهدی وجود دارند که نشان می‌دهند بشر اوّلیه اعداد طبیعی را برای شمارش مورد استفاده قرار داده است و به تدریج روش‌هایی را برای نمایش اعداد و انجام محاسبات اختراع کرده است.

شمارش گوسفندان قبل از رفتن به چرا و پس از بازگشت آن‌ها با استفاده از مفهوم تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی گوسفندها و زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی، یا به صورت یک انگشت، یا یک علامت روی سنگ و یا کنار گذاشتن یک تکه چوب به جای هر گوسفند، حتی هنوز هم گاهی به‌طور ابتدایی معمول است. این عمل که برای تهیه‌ی آمار و حتی رأی‌گیری‌های ساده هم به‌کار می‌رود از شواهد اوّلیه‌ی شناخت اعداد طبیعی است.

دنباله‌ی اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شود و هر عضو دیگر آن با افزودن یک واحد به عدد قبلی به‌دست می‌آید.

در سال‌های گذشته، با مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$$

و عمل‌های جمع و ضرب آن‌ها و با ویژگی‌های این دو عمل اصلی و نیز با عمل تفریق روی مجموعه‌ی **اعداد صحیح**

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$$

آشنا شده‌ایم.

ما در این‌جا ساختار اعداد صحیح را به روش اصل موضوعی مطرح نکرده بلکه فقط اصل موضوع «**خوش‌ترتیبی**» و یا معادل آن اصل موضوع «**استقرای ریاضی**» را به عنوان زیربنای قضیه‌های نظریه‌ی اعداد بیان می‌کنیم.

اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از اعداد طبیعی دارای **کوچک‌ترین عضو** است، یعنی اگر $S \subset \mathbb{N}$ و $S \neq \varnothing$، آن‌گاه عضوی از S مانند $s_\circ$ وجود دارد که به ازای هر s متعلق به S،

$$s_\circ \leq s$$

(کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی A را **عضو ابتدای** مجموعه‌ی A هم می‌نامند)[1].

اصل استقرای ریاضی

هر زیر مجموعه‌ی S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ برابر است:

الف) $1 \in S$

ب) هرگاه $n \in S$، آن‌گاه $n+1 \in S$.

با پذیرفتن هریک از اصل‌های فوق می‌توان اصل دیگر را به‌عنوان یک قضیه اثبات کرد.

۴ــ۲ــ معادل‌های اصل استقرای ریاضی

معادل‌های دیگری برای اصل استقرای ریاضی وجود دارند که برخی را در این‌جا مطرح می‌کنیم:

الف) فرض کنیم $P(n)$ عبارتی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و به ازای هر عدد طبیعی n از درستی $P(n)$، درستی $P(n+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تعمیم این مطلب به صورت زیر است:

ب) فرض کنیم $P(n)$ عبارتی درباره‌ی عدد صحیح n باشد. اگر به ازای یک $m \in \mathbb{Z}$، $P(m)$ درست باشد واگر به ازای هر $n \geq m$، از درستی $P(n)$ درستی $P(n+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ به

۱ــ نماد $s_\circ = \min S$ برای کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی S به‌کار می‌رود.

ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

می‌توان ثابت کرد که الف، ب، و اصل استقرای ریاضی دو به دو معادل‌اند.

درکتاب جبر و احتمال، مثال‌های متعددی وجود دارند که ما را با نحوه‌ی استفاده از اصل استقرای ریاضی آشنا می‌کنند. در این‌جا ذکر یک نکته را ضروری می‌دانیم :

در اثبات به روش استقرا باید درستی هر دو شرط بررسی شوند. مثلاً، عبارت زیر را درنظر بگیرید :

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲+۳$$

اگر چه گام دوم استقرای ریاضی (یعنی اثبات درستی به ازای $n+۱$، با فرض درست بودن به ازای n) برقرار است ولی هیچ عدد طبیعی n در این عبارت صدق نمی‌کند.

همان‌طور که گفتیم می‌توان ثابت کرد که اصل خوش‌ترتیبی و اصل استقرای ریاضی معادل‌اند. یعنی می‌توان به دلخواه یکی را اصل گرفت و دیگری را به عنوان قضیه ثابت کرد ؛ مثلاً داریم :

قضیه‌ی ۱ : اصل استقرای ریاضی از اصل خوش‌ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات: فرض کنیم $P \subset \mathbb{N}$، $۱ \in P$ و اگر $n \in P$ آن‌گاه $n+۱ \in P$. می‌خواهیم ثابت کنیم $P=\mathbb{N}$. اگر چنین نباشد پس $T=\mathbb{N}-P \neq \varnothing$. لذا T کوچک‌ترین عضوی دارد که آن را $t_۰$ می‌نامیم. $t_۰ \neq ۱$ (چرا؟)، پس $t_۰-۱ \in \mathbb{N}$ و $t_۰-۱<t_۰$، لذا $t_۰-۱ \notin T$، یعنی $t_۰-۱ \in P$ پس $t_۰-۱+۱=t_۰ \in P$، که با $t_۰ \in T$ در تناقض است. در نتیجه $P=\mathbb{N}$. □

اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیرمجموعه‌ی S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ برابر است :

الف) $۱ \in S$

ب) اگر اعداد طبیعی کوچک‌تر از n در S باشند، آن‌گاه $n \in S$.

اصل استقرای قوی ریاضی با اصل استقرای ریاضی و در نتیجه با اصل خوش‌ترتیبی معادل است. برای نشان دادن نحوه‌ی استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی، به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱: چند جمله‌ی اول دنباله‌ی موسوم به **دنباله‌ی اعداد لوکا** عبارت‌اند از :

$$۱,۳,۴,۷,۱۱,۱۸,۲۹,۴۷,\cdots$$

اگر جمله‌ی nام را با L_n نمایش دهیم این دنباله از به اصطلاح «رابطه‌ی بازگشتی» زیر

$$L_n = L_{n-۱} + L_{n-۲} \qquad n \geq ۳$$

و شرایط اولیه‌ی

$$L_۲ = ۳ \ , \ L_۱ = ۱$$

به‌دست می‌آید. با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n،

$$L_n < (\frac{۷}{۴})^n$$

اگر $S = \{n \in \mathbb{N} : L_n < (\frac{۷}{۴})^n\}$، آن‌گاه $۱ \in S$ و $۲ \in S$. (چرا؟) حال اگر $n \geq ۳$ و به ازای هر k وقتی که $k < n$، $k \in S$، آن‌گاه $L_{n-۱} < (\frac{۷}{۴})^{n-۱}$ و $L_{n-۲} < (\frac{۷}{۴})^{n-۲}$. پس

$$L_n < (\frac{۷}{۴})^{n-۱} + (\frac{۷}{۴})^{n-۲} = (\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴}+۱) < (\frac{۷}{۴})^n$$

یعنی $n \in S$. پس $S = \mathbb{N}$. لذا برای هر عدد طبیعی n داریم، $L_n < (\frac{۷}{۴})^n$. Δ

۴ــ۳ــ تقسیم‌پذیری

یکی از چهار عمل اصلی روی اعداد صحیح، تقسیم است. می‌دانیم حاصل تقسیم دو عدد صحیح الزاماً یک عدد صحیح نیست. مثلاً، حاصل تقسیم ۱۲− بر ۵، عدد صحیح نیست. در مواردی حاصل تقسیم عددی بر عددی دیگر یک عدد صحیح می‌شود مثل ۱۲ و ۶. در این حالت می‌گوییم عدد ۶ عدد ۱۲ را می‌شمارد، یا عدد ۱۲ بر ۶ تقسیم‌پذیر است. در واقع ۱۲ یک مضرب ۶ است : $۱۲ = ۶ \times ۲$. در حالت عمومی تعریف زیر را ارائه می‌دهیم :

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq ۰$، **تقسیم‌پذیر** یا (بخش‌پذیر) گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه‌ای که $a = bq$. در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و چنین می‌خوانیم : a بر b تقسیم‌پذیر است[1] و یا b یک شمارنده یا **مقسوم‌علیه** a است. هرگاه a بر b تقسیم‌پذیر نباشد می‌نویسیم $b \nmid a$. در حالت $b = ۰$، چون به ازای هر $q \in \mathbb{Z}$، $۰ \times q = ۰$، می‌توان تعریف تقسیم‌پذیری

۱ــ هرگاه a بر b تقسیم‌پذیر باشد می‌گوییم b عدد a را می‌شمارد (عاد می‌کند)، یا a مضرب b است، یا b یک سازه‌ی (عامل) a است.

را گسترش داد و عبارت «۰ بر ۰ تقسیم‌پذیر است» را نیز پذیرفت.

در مثال فوق $b=6$ ، $a=12$ ، $q=2$ و $2\times 6=12$ و می‌نویسیم $6|12$. از تعریف بالا نتایج زیر به‌دست می‌آیند :

الف) صفر بر هر عدد b، تقسیم‌پذیر است.

ب) اعداد ۱ و ۱− ، هر عدد صحیح را می‌شمارند. (چرا؟)

با توجه به مفهوم رابطه که در سال‌های قبل با آن آشنا شده‌ایم، می‌توان تقسیم‌پذیری را به عنوان یک رابطه با ویژگی‌های زیر بر مجموعه‌ی اعداد صحیح درنظر گرفت.

۱ــ این رابطه بازتابی است، زیرا برای هر عدد صحیح a داریم $a=a\times 1$ ، پس $a|a$.

۲ــ این رابطه ترایایی است، یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ ، آن‌گاه $a|c$. برای اثبات می‌گوییم : یک عدد صحیح q وجود دارد که $b=aq$ و یک عدد صحیح q' وجود دارد که $c=bq'$. در نتیجه

$$c=(aq)q'=a(qq')$$

یعنی $a|c$.

۳ــ این رابطه متقارن نیست، چون مثلاً $2|6$ ولی $6\nmid 2$

۴ــ این رابطه پاد متقارن نیست، چون مثلاً $2|-2$ و $-2|2$ ولی $2\neq -2$.

۴ــ۴ــ چند ویژگی تقسیم‌پذیری

با قضیه‌های زیر ویژگی‌های عمده‌ی تقسیم‌پذیری را ارائه می‌دهیم :

قضیه‌ی ۲ : به ازای اعداد صحیح a و b، اگر $a|b$ ، آن‌گاه

الف) $-a|b$ ب) $a|-b$ پ) $-a|-b$

ت) به ازای هر عدد صحیح m، $a|mb$. ث) اگر $b\neq 0$ ، آن‌گاه $|a|\leq|b|$.

اثبات: اگر $a|b$ بنا به تعریف $b=aq$. در نتیجه

$$b=aq=(-a)(-q)$$

و نیز

$$-b=a(-q)=(-a)q$$

پس الف، ب و پ برقرارند. علاوه بر آن برای $m\in\mathbb{Z}$

$$mb=m(aq)=a(mq)$$

پس $a|mb$.

برای اثبات قسمت آخر چون $b = aq$ پس $|b| = |a|\,|q|$. ولی $b \neq ۰$ در نتیجه $q \neq ۰$، پس $|q| \geq ۱$ یعنی $|a| \leq |b|$.

□

قضیه‌ی ۳ : به ازای اعداد صحیح a، b و c

الف) اگر $a|۱$، آن‌گاه $a = \pm ۱$ (تنها مقسوم‌علیه‌های عدد ۱، اعداد ۱و ۱− هستند).

ب) اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $a = \pm b$.

پ) اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه به ازای اعداد صحیح و دلخواه m و n، داریم $a | mb + nc$.

اثبات: الف) اگر $a|۱$، آن‌گاه $|a| \leq ۱$ یعنی $|a| = ۰$ و یا $|a| = ۱$. اما اگر $|a| = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$ ولی $۰ \nmid ۱$ پس $|a| = ۱$. در نتیجه $a = \pm ۱$.

ب) اگر $a|b$ و $b|a$ آن‌گاه عدد صحیح q وجود دارد که $aq = b$ و عدد صحیح q' وجود دارد که $a = bq'$. پس :

$$b = aq = b(qq')$$

اگر $b = ۰$ الزاماً $a = ۰$ و در نتیجه $a = b = ۰$. اگر $b \neq ۰$ آن‌گاه $qq' = ۱$، یعنی $q'|۱$ و لذا $q' = \pm ۱$. پس $a = \pm b$

پ) اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه عدد صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و عدد صحیح q' وجود دارد که $c = aq'$. به ازای اعداد صحیح دلخواه m و n داریم

$$\begin{aligned} mb + nc &= maq + naq' \\ &= (mq + nq')a \end{aligned}$$

پس :

$$a | mb + nc$$

□

۴ــ۵ــ الگوریتم تقسیم

اگر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b تقسیم‌پذیر نباشد، در انجام تقسیم باقیمانده‌ای به‌جز صفر پیدا می‌شود. کلیّت مسئله اگرچه یک الگوریتم نیست ولی هنوز اسم سنتی خود «الگوریتم تقسیم» را حفظ کرده و عبارت است از :

قضیه‌ی ۴ : (الگوریتم تقسیم) : اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه اعداد یکتای $q \in \mathbb{Z}$ و r وجود دارند که

$$a = bq + r \ , \ \ 0 \leq r < b$$

(**q خارج قسمت، r باقیمانده، a مقسوم** و **b مقسوم‌علیه** نامیده می‌شوند.)

اثبات: نخست نشان می‌دهیم که $q \in \mathbb{Z}$ ، r وجود دارند و پس از آن یکتا بودن آن‌ها را ثابت می‌کنیم. چون a، b و q اعداد صحیح‌اند، $S = \{a - bq > 0 : q \in \mathbb{Z}\}$ یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی است. نشان می‌دهیم که S تهی نیست و اصل خوش‌ترتیبی را به‌کار می‌بریم. به ازای عدد صحیح $q = -|a| - 1$ ، $a - bq > 0$ ؛ زیرا

$$a - bq = a + b|a| + b \geq a + |a| + 1 \geq 1 > 0$$

پس به ازای این مقدار q، $a - bq \in S$. لذا S دارای کوچک‌ترین عضو است. کوچک‌ترین عضو این مجموعه را r می‌نامیم. در این صورت عددی صحیح مانند q وجود دارد که $r = a - bq$. یعنی :

$$a = bq + r$$

اگر $r > b$ ، آن‌گاه

$$r - b = a - b(q + 1) \in S$$

ولی چون $b > 0$ پس $r - b < r$ که متناقض با کوچک‌ترین بودن r است، پس $r \leq b$. حال اگر $r = b$ مقدار $q_1 = q + 1$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت

$$a = bq_1$$

که به جای r، $r_1 = 0$ را درنظر می‌گیریم. پس همواره $0 \leq r < b$. برای اثبات یکتا بودن، فرض کنیم چنین نباشد، یعنی

$$a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b \quad , \quad a = bq_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < b$$

پس :

$$0 = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

یا

$$r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$$

یعنی $b | r_2 - r_1$. اگر $r_2 - r_1 \neq 0$ ، آن‌گاه $b \leq |r_2 - r_1|$. از سوی دیگر

$$-b < r_2 - r_1 < b$$

یعنی :

$$|r_۲ - r_۱| < b$$

که این با $b \le |r_۲ - r_۱|$ تناقض دارد. پس $r_۲ - r_۱ = ۰$. یعنی $r_۲ = r_۱$ و چون $b \neq ۰$ ، $q_۱ - q_۲ = ۰$ یعنی $q_۲ = q_۱$. □

توجه کنید که هرگاه $r = ۰$ ، آن‌گاه $b|a$.

مثال ۲: برای $a = ۱۰۲۸$ و $b = ۳۴$ ، داریم

$$q = \left\lfloor \frac{۱۰۲۸}{۳۴} \right\rfloor = ۳۰$$

(در این‌جا منظور از نماد $\lfloor x \rfloor$ ، جزء صحیح عدد حقیقی x است.)

و

$$r = ۱۰۲۸ - ۳۰ \times ۳۴ = ۸$$

پس :

$$۱۰۲۸ = ۳۴ \times ۳۰ + ۸$$

Δ

یکی از کاربردهای قضیه‌ی الگوریتم تقسیم، دسته‌بندی اعداد برحسب باقیمانده‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی و ثابت b است.

مثال ۳: باقیمانده‌ی هر عدد صحیح بر ۲، عدد ۰ یا ۱ است. این مطلب اعداد صحیح را به دو دسته تقسیم می‌کند. تمام اعدادی را که باقیمانده‌ی آن‌ها بر ۲، ۰ است، یعنی ۲ آن‌ها را می‌شمارد **زوج** و بقیه‌ی اعداد را **فرد** می‌نامند. یعنی می‌توان نوشت :

$$\mathbb{Z} = [۰]_۲ \cup [۱]_۲$$

که در آن

$$[۰]_۲ = \{n \in \mathbb{Z} : n = ۲q, q \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : ۲|n\}$$

مجموعه‌ی اعداد زوج، و

$$[۱]_۲ = \{n \in \mathbb{Z} : n = ۲q + ۱, q \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : ۲\nmid n\}$$

مجموعه‌ی اعداد فرد است. Δ

به همین ترتیب هر عدد صحیح را می‌توان تنها به یکی از صورت‌های

$$۴q\,,\,۴q+۱\,,\,۴q+۲\,,\,۴q+۳$$

نوشت، که در آن $q \in \mathbb{Z}$. این مطلب اساس مبحث همنهشتی است که در سال گذشته با آن آشنا شده‌ایم.

۴ـ۶ـ نمایش اعداد صحیح

استفاده از دستگاه دهدهی (اعشاری) متداول‌ترین صورت نمایش اعداد است. اعداد طبیعی را می‌توان به صورت ضرایب توان‌های ۱۰ نمایش داد. مثلاً عدد ۳۴۷۶۵ عبارت است از :

$$۳\times۱۰^{۴}+۴\times۱۰^{۳}+۷\times۱۰^{۲}+۶\times۱۰^{۱}+۵\times۱۰^{۰}$$

شاید یکی از دلایل نمایش اعداد در دستگاه دهدهی یا به اصطلاح در «**مبنای یا پایه‌ی ۱۰**» وجود ۱۰ انگشت دست بوده که در شمارش طبیعی به‌کار می‌رفته است. این نحوه‌ی نمایش را ابتدا هندی‌ها قبل از سال ۸۰۰ میلادی اختراع کرده‌اند. این مطلب را محمدبن موسی خوارزمی در کتاب «جمع و تفریق، بر طبق حساب هندی» شرح داده و نمایش رقم صفر با نماد ۰ هم برای اولین بار در این کتاب آمده است. اروپایی‌ها این دستگاه را هندی ـ عربی می‌نامند. دستگاه دیگری هم که در ریاضیات اسلامی وجود داشته، دستگاه شصت شصتی بوده که مسلمان‌ها فکر آن را از بابلی‌ها گرفتند و آن را تکمیل کردند. مبنای این نمایش عدد شصت بوده است، که در ارتباط با محاسبات نجومی و تقسیم ساعت به ۶۰ دقیقه و دقیقه به ۶۰ ثانیه است. با نمایش اعداد در مبنای ۲ هم که در نمایش داخلی کامپیوتر به‌کار می‌رود آشنا هستیم.

به‌طور کلی هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌تواند مبنا باشد.

قضیه‌ی ۵ : اگر b یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، هر عدد طبیعی n را می‌توان به طریقی یکتا به صورت

$$n=a_k b^k+a_{k-۱}b^{k-۱}+\cdots+a_۱ b+a_۰$$

نمایش داد، که در آن k یک عدد حسابی[۱] است و برای هر $j=۰,۱,۲,\cdots,k$ ، $۰\le a_j\le b-۱$ و $a_k\neq ۰$.

اثبات: اگر الگوریتم تقسیم را متوالیاً به صورت زیر به کار گیریم، قضیه ثابت می‌شود. ابتدا n را بر b تقسیم می‌کنیم.

$$n=bq_۰+a_۰ \qquad ۰\le a_۰\le b-۱$$

حال $q_۰$ را بر b تقسیم می‌کنیم

$$q_۰=bq_۱+a_۱ \qquad ۰\le a_۱\le b-۱$$

۱ـ هر عدد صحیح نامنفی را حسابی گویند.

این عمل را ادامه می‌دهیم

$$q_1 = bq_2 + a_2 \qquad 0 \le a_2 \le b-1$$

$$q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} \qquad 0 \le a_{j+1} \le b-1$$

$$\vdots$$

در دنباله‌ی $q_0, q_1, q_2, \ldots$ داریم :

$$\vdots$$

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots \ge 0$$

(دقت کنید : $q_j > q_{j+1}$ مگر وقتی که $q_{j+1} = 0$، چون در غیر این حالت، $b > 1$، $a_{j+1} \ge 0$ و $q_{j+1} \ge 1$، پس

$$q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} > q_{j+1})$$

لذا این کار را حداکثر تا n مرحله می‌توان ادامه داد. چون دقیقاً $n-1$ عدد صحیح مختلف بین صفر و n وجود دارند. پس در مرحله‌ای $q_k = 0$ و داریم :

$$q_{k-1} = b \times 0 + a_k \ , \ 0 \le a_k \le b-1$$

اگر به ترتیب به جای هر q_{k-1}، $q_{k-2}, \ldots, q_2$، q_1، q_0 حاصل تقسیم آن را بنویسیم، فرمول موردنظر به‌دست می‌آید و بدیهی است که $a_k \neq 0$، زیرا اگر $a_k = 0$ آن‌گاه $q_{k-1} = 0$، و یک مرحله‌ی قبل از آن توقف می‌کردیم. اثبات یکتایی این نمایش را در مقاطع تحصیلی بالاتر خواهید دید. □

(در این حالت n را به صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$n = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0)_b$$

این نمایش را[1]، **نمایش عدد n در مبنای b** می‌نامند. هریک از a_i ها را یک **رقم** در مبنای b گویند و $k+1$، تعداد ارقام عدد n در مبنای b است و می‌گویند n در مبنای b، $k+1$ رقم دارد.)

نمایش اعداد در دستگاه **دودویی**، یا در مبنای ۲، به دلیل کاربرد آن در کامپیوتر و نیز تناظری که در رابطه با پرتاب سکه در احتمال دارد بسیار جالب است. علاوه بر آن، قضیه‌ی ۵ در رابطه با پیدا کردن باقیمانده‌ی تقسیم بر برخی از اعداد به‌کار می‌رود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ : قاعده‌ی پیدا کردن باقیمانده‌ی تقسیم بر ۳ یا ۹

اگر $A = (a_n \cdots a_1 a_0)_{10}$ می‌دانیم این عدد برابر است با

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

۱ــ در برخی از کتاب‌ها نمایش این عدد به صورت $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ است.

$$= (\overbrace{99\cdots9}^{n}+1)a_n + (\overbrace{99\cdots9}^{n-1}+1)a_{n-1} + \cdots + (9+1)a_1 + a_0$$

$$= 9(\overbrace{111\cdots1}^{n}a_n + \overbrace{11\cdots1}^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_1) + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

پس باقیمانده‌ی تقسیم A بر ۹ (یا ۳) برابر است با باقیمانده‌ی مجموع

$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

بر ۹ (یا ۳). به روش مشابه، قاعده‌ی پیدا کردن باقیمانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۱ را نیز می‌توان پیدا کرد. (چگونه؟) Δ

۴ــ۷ــ تمرین‌ها

۱ــ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \le x < 5\}$

ب) $C = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x \le 1\}$

پ) $E = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \le x < 1\}$

(بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی S عبارت است از $s_1 \in S$، که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \le S_1$)[1].

۲ــ زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح مثال بزنید که کوچک‌ترین عضو نداشته باشد.

۳ــ ثابت کنید که هر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد صحیح و از پایین کراندار، دارای کوچک‌ترین عضو و هر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد صحیح و از بالا کراندار دارای بزرگ‌ترین عضو است.

(یادآوری می‌کنیم که $A \subset \mathbb{Z}$ از بالا کراندار است اگر عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ یافت شود که به ازای هر $a \in A$، $a \le n$ و هم‌چنین $A \subset \mathbb{Z}$ از پایین کراندار است اگر عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ یافت شود که برای هر $a \in A$، $n \le a$.)

۴ــ خاصیت ارشمیدسی :

ثابت کنید اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $na \ge b$.

۱ــ نماد $s_1 = \max S$ برای بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی S به‌کار می‌رود.

۵ ــ ثابت کنید $\binom{n}{k}$ برای اعداد طبیعی n و $0 \leq k \leq n$ همیشه عدد طبیعی است.

۶ــ الف) برای $n \geq 2$ ، ثابت کنید :

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$$

ب) با استفاده از قسمت الف و این‌که برای هر عدد طبیعی $m \geq 2$ ،

$$2\binom{m}{2}+m=m^2$$

ثابت کنید که

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

۷ــ کدام‌یک از اعداد زیر بر ۲۲ تقسیم‌پذیرند؟

الف) ۰ ب) ۴۴۴

پ) ۱۷۱۶ ت) ۳۲۵۱۶-

۸ ــ الف) اگر a، b، c و d اعداد صحیح باشند و $a \neq 0$، $c \neq 0$، $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید $ac|bd$.

ب) نشان دهید اگر a، b و $c \neq 0$ اعداد صحیح باشند، آن‌گاه $a|b$ اگر و تنها اگر $ac|bc$.

پ) ثابت کنید اگر برای هر $i=1,2,\cdots,n$ ، $a|b_i$ آن‌گاه برای اعداد صحیح دلخواه m_1 ، m_2 ، ... و m_n داریم

$$a|m_1b_1+m_2b_2+\cdots+m_nb_n$$

۹ــ خارج قسمت و باقیمانده را در الگوریتم تقسیم هریک از اعداد زیر، وقتی که بر ۱۷ تقسیم شوند به‌دست آورید.

الف) ۱۰۰ ب) ۴۴-

۱۰ــ الف) ثابت کنید حاصل جمع دو عدد صحیح زوج و هم‌چنین حاصل جمع دو عدد صحیح فرد، زوج است.

ب) ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد فرد، فرد است.

۱۱ــ الف) ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد به صورت $4q+1$ و هم‌چنین حاصل‌ضرب هر

دو عدد به صورت $۴q+۳$ ، به صورت $۴q+۱$ است. $(q \in \mathbb{Z})$

ب) ثابت کنید منبع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است.

۱۲ـ نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد به صورت $۶q+۵$ به صورت $۶q+۱$ است.

۱۳ـ ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

۱۴ـ الف) عدد ۲۳۶ را در مبنای ۷ بنویسید.

ب) عدد $(۱۰۰۱۰۰۱۱)_۲$ برابر چه عددی در مبنای ۱۰ است؟

پ) عدد ۱۸۶۴ را در مبنای ۲ بنویسید.

ت) عدد $(a۳۵b۰۶)_{۱۶}$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

(دقت کنید که اگر مبنا بیشتر از ۱۰ باشد، ارقام بیشتر از ۹ را به ترتیب با a، b، c، d و ...

نمایش می‌دهند، یعنی مثلاً در مبنای ۱۶، $a=۱۰$ ، $b=۱۱$ ، $c=۱۲$، $d=۱۳$ ، $e=۱۴$ و $f=۱۵$.

البته گاهی هم عدد بالا را با $(۱۰\ \ ۳\ \ ۵\ \ ۱۱\ \ ۰\ \ ۶)_{۱۶}$ هم نمایش می‌دهند.)

مجله‌ی ریاضی

دستگاه اعداد رمزی را ابتدا یونانی‌ها به‌کار گرفتند. در این دستگاه، اعداد را با حروف نمایش می‌دادند. در دوره‌ی بعد از ظهور اسلام نیز به وفور از حروف ابجد استفاده می‌شد و محاسباتی با آن‌ها صورت می‌گرفت. این طریقه محاسبه را حساب جُمّل می‌گویند و جدول آن به شرح زیر است :

ی	ط	ح	ز	و	هـ	د	ج	ب	ا
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	ص	ف	ع	س	ن	م	ل	ک	
	۹۰	۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	
غ	ظ	ض	ذ	خ	ث	ت	ش	ر	ق
۱۰۰۰	۹۰۰	۸۰۰	۷۰۰	۶۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰

حساب جُمّل (حساب ابجدی) در ضبط تاریخ حوادث به عنوان ماده‌ی تاریخ به‌کار می‌رود.

فصل ۵

اعداد اول

در فصل قبل، تقسیم‌پذیری هر دو عدد صحیح به عنوان یک رابطه مطرح شد. برخی از اعداد بر تعداد زیادی از اعداد طبیعی تقسیم‌پذیرند، مثل ۲۴ که بر اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ تقسیم‌پذیر است. با این حال دسته‌ای دیگر از اعداد طبیعی هیچ مقسوم علیهی به‌جز ۱ و خود آن عدد ندارند. این اعداد غیر ۱ را اعداد اول می‌نامند.

تعریف: هر عدد طبیعی غیر از ۱ را که جز بر ۱ و خودش بر هیچ عدد طبیعی دیگری تقسیم‌پذیر نباشد **عدد اول** گویند. هر عدد طبیعی به‌جز ۱ را که اول نیست، **عدد مرکب** می‌نامند.

مثال ۱ : اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ اول و اعداد ۴، ۶، ۸، ۹ و ۱۰ مرکب‌اند.

قضیه‌ی ۱: هر عدد صحیح به جز ۱ و ۱- حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد.

اثبات : هر عدد صحیح مورد نظر را a می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، هر عدد اولی آن را می‌شمارد. اگر $a \neq 0$ ، فرض می‌کنیم S مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌تر از ۱ عدد صحیح a باشد. S تهی نیست، چون $|a| \in S$. کوچک‌ترین عضو S را m می‌نامیم. (چرا S کوچک‌ترین عضو دارد؟) m اول است، زیرا اگر m اول نباشد آن‌گاه عدد طبیعی $m_1 > 1$ ، $m_1 \neq m$ وجود دارد که $m_1 | m$. پس m_1 هم عضو S است (چرا؟) که با کوچک‌تر بودن m در تناقض است. پس a حتماً یک مقسوم‌علیه اول مانند m دارد.

قضیه‌ی ۲ : بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.[1]

اثبات: می‌دانیم اعداد ۲، ۳، ۵ و ... اول‌اند، حال اگر این دنباله متناهی باشد، فرض می‌کنیم

۱ــ این قضیه را اقلیدس در حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد اثبات کرده است.

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ تنها عدد اول باشند. $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ را درنظر می‌گیریم. چون m یک عدد طبیعی و مخالف p_1، p_2، ... و p_n است، m باید مرکب باشد. پس یک مقسوم‌علیه اول دارد که آن را p_j می‌نامیم. داریم:

$$p_j | m \quad , p_j | p_1 p_2 \cdots p_n$$

پس $m - (p_1 p_2 \cdots p_n)$ بر p_j تقسیم‌پذیر است. یعنی $p_j | 1$ که غیر ممکن است. لذا تعداد اعداد اول نامتناهی است. □

قضیه‌ی ۳ : اگر n یک عدد مرکب باشد، آن‌گاه n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ یا مساوی با آن دارد.

اثبات: چون n مرکب است، پس $n = ab$ به‌طوری که $1 < a \le b < n$. اگر $a > \sqrt{n}$، آن‌گاه $b > \sqrt{n}$ و در نتیجه $n = ab > n$ که یک تناقض است. پس حتماً $a \le \sqrt{n}$. چون $a \ne 1$، پس بنابر قضیه‌ی ۱ عدد اول p وجود دارد که $p | a$ و چون $a | n$ پس $p | n$. اما $p \le a$، یعنی عدد اول p وجود دارد که $p | n$ و $p \le \sqrt{n}$.

به کمک قضیه‌ی ۳ می‌توان اول بودن هر عددی را بررسی کرد.

مثال ۲: می‌خواهیم تحقیق کنیم عدد ۴۷ اول است یا نه. مشاهده می‌کنیم:

$$2 \nmid 47 \;,\; 3 \nmid 47 \;,\; 5 \nmid 47$$

و چون $7 > \sqrt{47} > 6$، لذا تنها اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{47}$ یا مساوی با آن اعداد ۲،۳ و ۵ هستند که هیچ‌کدام ۴۷ را نمی‌شمارند. پس ۴۷ اول است.

قضیه‌ی ۳ اساس فرایند **غربال اِراتِسْتِنْ** است. مثلاً برای تعیین اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰، تمام مضرب‌های اول اعداد کوچک‌تر از $\sqrt{100} = 10$ یعنی مضرب‌های ۲، ۳، ۵ و ۷ را از جدول اعداد از ۱ تا ۱۰۰ حذف می‌کنیم. جدول صفحه‌ی‌بعد نمونه‌ای از غربال اراتستن است.

	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

و در نتیجه تنها اعداد اول بین ۱ تا ۱۰۰ عبارت‌اند از :

۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۹،۳۱،۳۷،۴۱،۴۳،۴۷،۵۳،۵۹،۶۱،۶۷،۷۱،۷۳،۷۹،۸۳،۸۹،۹۷

۵ــ۱ــ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

می‌دانیم که عدد صحیح c را مقسوم‌علیه یا شمارنده‌ی مشترک دو عدد صحیح a و b گویند هرگاه $c|a$ و $c|b$.

تعریف: عدد طبیعی d را **بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک** (ب. م. م) دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر است) گویند، اگر d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد، و مقسوم‌علیه‌های مشترک دیگر a و b، از d کوچک‌تر باشند. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را با (a,b) نمایش می‌دهند[1].

۱ــ مقسوم‌علیه مشترک a و b را با نماد $a \sqcap b$ هم نمایش می‌دهند.

مثال ۳: مقسوم‌علیه‌های مشترک ۲۴ و ۸۴ عبارت‌اند از :

$$\pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴, \pm ۶, \pm ۱۲$$

پس :

$$(۲۴, ۸۴) = ۱۲$$

با استفاده از نتایج اصل خوش‌ترتیبی می‌توان ثابت کرد که ب.م.م دو عدد صحیح (که هر دو صفر نیستند) همواره وجود دارد. (چرا؟) علاوه بر آن قضیه‌ی زیر را داریم :

قضیه‌ی ۴ : بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، برابر است با کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی

$$S = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > ۰\}$$

اثبات: مجموعه‌ی S حداقل یک عضو دارد (چرا؟) پس دارای کوچک‌ترین عضو است. فرض می‌کنیم d کوچک‌ترین عضو S باشد،

$$d = m_۰a + n_۰b > ۰ \ , \ \ m_۰, n_۰ \in \mathbb{Z}$$

از الگوریتم تقسیم داریم

$$a = dq + r \ , \ \ ۰ \le r < d$$

اگر $r > ۰$ می‌دانیم $r \notin S$ چون $r < d$، ولی

$$r = a - m_۰aq - n_۰bq = (۱ - m_۰q)a - (n_۰q)b$$

ترکیب خطی[۱] a و b است که با کوچک‌ترین بودن d در تناقض است. پس $r = ۰$. یعنی $d | a$. به همین ترتیب $d | b$. یعنی d مقسوم‌علیه مشترک a و b است. اگر $c > ۰$، $c | a$ و $c | b$، آن‌گاه $c | (am_۰ + bn_۰)$ یعنی $c | d$ پس $c \le d$. در نتیجه d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است.

□

می‌توان ثابت کرد که هرگاه $a = bq + r$ آن‌گاه $(a, b) = (b, r)$. (چرا؟)

این مطلب، زیربنای الگوریتم اقلیدس برای یافتن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b است.

الگوریتم اقلیدس بدین‌گونه عمل می‌کند که اگر $r_۰ = a > ۰$ و $r_۱ = b > ۰$، آن‌گاه

$$r_۰ = r_۱q_۱ + r_۲ \qquad ۰ \le r_۲ < r_۱$$

۱ــ برای هر m، $n \in \mathbb{Z}$، $ma + nb$ را یک ترکیب خطی a و b می‌نامند.

پس :

$$(a,b)=(r_۰,r_۱)=(r_۱,r_۲)$$

هم‌چنین

$$r_۱=r_۲q_۲+r_۳ \qquad ۰\le r_۳<r_۲$$

$$(a,b)=(r_۱,r_۲)=(r_۱,r_۳)$$

$$\vdots$$

$$r_{n-۳}=r_{n-۲}q_{n-۲}+r_{n-۱} \qquad ۰\le r_{n-۱}<r_{n-۲}$$

$$(a,b)=(r_{n-۳},r_{n-۲})=(r_{n-۱},r_{n-۲})$$

$$r_{n-۲}=r_{n-۱}q_{n-۱}+r_n \qquad ۰\le r_n<r_{n-۱}$$

$$(a,b)=(r_{n-۱},r_{n-۲})=(r_{n-۱},r_n)$$

چون

$$a=r_۰>r_۱>r_۲\cdots\ge ۰$$

پس از چند مرحله باقیمانده صفر خواهد شد، زیرا بیشتر از a عدد صحیح مختلف بین صفر و a نیست. پس برای یک عدد طبیعی n داریم $r_{n+۱}=۰$ و $r_{n-۱}=r_nq_n$. در نتیجه

$$(a,b)=(r_{n-۱},r_n)=(r_n,۰)=r_n$$

که r_n آخرین باقیمانده‌ی غیرصفر در این رشته از تقسیم‌های متوالی است.

مثال ۴:

$$(۳۰,۷۲)=(۳۰,۷۲-۲\times ۳۰)=(۳۰,۱۲)$$
$$=(۲\times ۱۲+۶,۱۲)=(۶,۱۲)=(۶,۲\times ۶+۰)=(۶,۰)=۶$$

که معمولاً به صورت خلاصه‌ی نردبانی زیر می‌نویسند :

خارج قسمت	۲	۲	۲
۷۲	۳۰	۱۲	۶
باقیمانده	۱۲	۶	۰

Δ

قضیه‌ی ۵ : عدد طبیعی d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b است اگر و تنها اگر

۱) $d|a$ و $d|b$ و

۲) هرگاه $c|a$ و $c|b$ ، آن‌گاه $c|d$.

اثبات: اگر $d=(a,b)$ آن‌گاه $d|a$ و $d|b$ یعنی شرط ۱ برقرار است. علاوه بر آن اعداد صحیح m و n وجود دارند که

$$d = ma + nb$$

حال اگر $c|a$ و $c|b$ آن‌گاه $c|d$ یعنی شرط ۲ هم برقرار است.

برعکس اگر d در دو شرط فوق صدق کند و c یک مقسوم‌علیه مشترک مثبت a و b باشد، آن‌گاه $c|d$ یعنی $c \le d$. پس d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است. □

تعریف: دو عدد صحیح a و b را **نسبت به هم اول یا متباین** گویند، هرگاه $(a,b)=۱$.

مثال ۵: اعداد ۹ و ۱۰ و نیز دو عدد ۲۵ و ۴۲ نسبت به هم اول‌اند. Δ

با استفاده از قضیه‌ی ۴، می‌توان ثابت کرد که دو عدد صحیح a و b نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر اعداد صحیح m و n وجود داشته باشند که

$$۱ = ma + nb$$

قضیه‌ی ۶ : (لم اقلیدس). اگر $a|bc$ و $(a,b)=۱$ آن‌گاه $a|c$.

اثبات: اعداد صحیح m و n را می‌توان پیدا کرد که برای آن‌ها

$$۱ = ma + nb$$

پس :

$$c = cma + cnb$$

اما چون $a|bc$ ، پس $bc = aq$. در نتیجه

$$c = cma + naq = (cm + nq)a$$

یعنی $a|c$. □

قضیه‌ی ۷ : اگر p یک عدد اول باشد و $p|ab$ ، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.

اثبات: اگر $p\nmid a$ ، آن‌گاه $(p,a)=۱$ ، زیرا اگر $(p,a)=d$ و $d\ne۱$ آن‌گاه $d=p$. (چرا؟) پس $p|a$ که یک تناقض است. در نتیجه $(p,a)=۱$ ، پس طبق قضیه‌ی ۶، $p|b$.
□

تعریف بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد را به چند عدد نیز می‌توان تعمیم داد :

تعریف: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد صحیح $a_1, a_2, \cdots, a_n$ که همگی آن‌ها صفر نیستند عبارت است از بزرگ‌ترین عدد صحیحی که تمام این اعداد صحیح را بشمارد. این عدد را با $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ نمایش می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n))$$

مثال ۶:

$$\begin{aligned}(۲۴, ۳۰, ۷۲) &= (۲۴, (۳۰, ۷۲)) \\ &= (۲۴, ۶) = ۶\end{aligned}$$

Δ

۵ــ۲ــ قضیه‌ی بنیادی حساب

نقش اصلی اعداد اول به عنوان عناصر سازنده‌ی تمام اعداد صحیح بسیار اهمیت دارد. در قضیه‌ی زیر این مطلب را بدون اثبات بیان می‌کنیم :

قضیه‌ی ۸ : هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان بدون توجه به ترتیب به‌طور یکتا به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت. یعنی n را می‌توان به صورت $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ نمایش داد که در آن برای هر i، p_i عددی اول است. این نمایش را تجزیه‌ی عدد n به عامل‌های اول می‌نامند.

نکته‌ی ۱: در تجزیه اعداد طبیعی به عامل‌های اول، می‌توان حاصل‌ضرب چند عدد اول مساوی را به‌صورت توانی از آن نوشت، یعنی

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

که در آن p_i ها اعداد اول متمایز و α_i ها اعدادی طبیعی‌اند. این نمایش را نمایش متعارف عدد n می‌نامند.

نکته‌ی ۲: برای $n = ۱$ ، می‌توان $۱ = p^{\circ}$ را درنظر گرفت، درحالی که p هر عدد اولی می‌تواند باشد.

نکته‌ی ۳: به طور کلی هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$n = \prod_{p} p^{\alpha_p(n)} = ۲^{\alpha_۲(n)} ۳^{\alpha_۳(n)} ۵^{\alpha_۵(n)} \cdots$$

که در آن $\prod_p$ به مفهوم ضرب روی تمام اعداد اول است و برای هر عدد اول p، $\alpha_p(n)$ بزرگ‌ترین توان p است که عدد n را می‌شمارد و به این صورت می‌نویسند :

$$p^{\alpha_p(n)} \| n$$

یعنی $p^{\alpha_p(n)} | n$ ولی $p^{\alpha_p(n)+1} \nmid n$ (واضح است که اگر $p > n$ ، حتماً $\alpha_p(n) = 0$)

حال قضیه‌ی زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم :

قضیه‌ی ۹ : اگر $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ ، آن‌گاه

$$d = (a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_n^{\gamma_n}$$

که در آن برای هر عدد i،

$$\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$$

(دقت کنید که اگر برای عدد اول p، $p \nmid n$ ، آن‌گاه توان آن را در نمایش n برابر با صفر می‌گیریم.)

مثال ۷:

$$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$$

$$72 = 2^3 \times 3^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5^0$$

پس $(30, 72) = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$

Δ

۵ــ۳ــ کوچک‌ترین مضرب مشترک

می‌دانیم عدد صحیح c را مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b نامند، هرگاه $a|c$ و $b|c$.

تعریف: عدد m را **کوچک‌ترین مضرب مشترک** (ک.م.م) دو عدد صحیح a و b نامند، هرگاه m مضرب مشترک مثبت دو عدد a و b باشد و اگر $a|c$ و $b|c$ آن‌گاه $m \le c$. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b را با $[a.b]$[1] نمایش می‌دهند.

وجود کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد غیرصفر a و b را با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی می‌توان ثابت کرد.

۱ــ کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b را با نماد $a \sqcup b$ هم نمایش می‌دهند.

مثال ۸: مضرب‌های مشترک مثبت اعداد ۴ و ۶ عبات‌اند از :

$$۱۲, ۲۴, ۳۶, \cdots$$

که کوچک‌ترین آن‌ها ۱۲ است. یعنی $۱۲ = [۴, ۶]$. Δ

قضیه‌های زیر را که در رابطه با کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عددند بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱۰ : برای هر دو عدد صحیح غیرصفر a و b، $m = [a, b]$ اگر و تنها اگر

۱) $a | m$ و $b | m$ و

۲) اگر $a | c$ و $b | c$ ، آن‌گاه $m | c$.

قضیه‌ی ۱۱ : اگر $a = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_۱^{\beta_۱} p_۲^{\beta_۲} \cdots p_n^{\beta_n}$ ، آن‌گاه

$$m = [a, b] = p_۱^{\theta_۱} p_۲^{\theta_۲} \cdots p_n^{\theta_n}$$

که در آن برای هر i،

$$\theta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$$

قضیه‌ی ۱۲ : برای هر دو عدد صحیح غیرصفر a و b داریم :

$$[a, b](a, b) = |ab|$$

مثال ۹:

$$۳۰ = ۲^۱ \times ۳^۱ \times ۵^۱$$

$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۰$$

$$[۳۰, ۷۲] = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۱ = ۳۶۰$$

$$[۳۰, ۷۲] \times (۳۰, ۷۲) = ۳۶۰ \times ۶ = ۲۱۶۰$$

$$۳۰ \times ۷۲ = ۲۱۶۰$$

Δ

تعریف: کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد صحیح غیرصفر $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت که بر همه‌ی آن‌ها تقسیم‌پذیر باشد، و آن را با $[a_۱, a_۲, \cdots, a_n]$ نمایش می‌دهند.

می‌توان ثابت کرد که

$$[a_۱, a_۲, \cdots, a_n] = [a_۱, a_۲, \cdots, a_{n-۲}, [a_{n-۱}, a_n]]$$

مثال ۱۰ :

راه اول :
$$[10,4,6]=[10,[4,6]]=[10,12]=60$$

راه دوم :
$$10=2^1\times5^1=2^1\times3^0\times5^1$$
$$4=2^2=2^2\times3^0\times5^0$$
$$6=2\times3=2^1\times3^1\times5^0$$
$$[10,4,6]=2^2\times3^1\times5^1=60$$

Δ

۵ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ کدام یک از اعداد زیر اول و کدام‌یک مرکب‌اند؟

الف) ۱ ب) ۷۳۷ پ) ۱۸۹۱ ت) ۲۰۷۹۱

۲ــ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول به صورت $4q+3$ یافت می‌شوند.

۳ــ اعداد زیر را به عوامل اول تجزیه کنید :

الف) ۹۵۵۵ ب) ۹۹۷۳- پ) ۳۷۴۲۳ ت) ۲۸۰۰۰

۴ــ نشان دهید که هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک مربع کامل و یک عدد صحیح بدون عامل مربع به‌جز ۱ (یعنی عددی که بر هیچ عدد مربعی جز ۱ قابل قسمت نباشد) نوشت.

۵ــ اگر p_1، p_2، ...، p_n و q اعداد اول باشند و $q|p_1p_2\cdots p_n$ ثابت کنید به ازای یک i، $1\le i\le n$، $p_i=q$.

۶ــ الف) نشان دهید اگر a نسبت به b و c اول باشد، نسبت به bc هم اول خواهد بود.

ب) نشان دهید اگر a نسبت به b_1، b_2، ... و b_n اول باشد، نسبت به $b_1b_2\cdots b_n$ هم اول خواهد بود.

۷ــ نشان دهید اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c|a+b$، آن‌گاه c نیز نسبت به a و b اول خواهد بود.

۸ ــ الف) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، نشان دهید که برای اعداد طبیعی m و n، a^n و b^m هم نسبت به هم اول‌اند.

ب) اگر برای عدد طبیعی n، $a^n|b^n$ ثابت کنید $a|b$.

فصل ۶

همنهشتی

۶ــ۱ــ مفهوم همنهشتی

مفهوم همنهشتی را در سال‌های قبل دیده‌ایم. در زیر خلاصه‌ای از آنچه را که خوانده‌ایم بیان داشته و قضیه‌های مربوط به آن را مطرح می‌کنیم.

مسائلی از قبیل روزهای هفته، ساعت و ماه که حالت گردشی داشته و با افزودن عدد ثابتی (۷روز، ۲۴ ساعت و یا ۱۲ماه) به وضعیت و شرایط قبلی برمی‌گردند به عنوان مثال‌هایی عملی از نظریه‌ی همنهشتی هستند که در اوایل قرن نوزدهم به وسیله‌ی گاوس معرفی شد.

تعریف: فرض می‌کنیم m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b رابه پیمانه‌یm **همنهشت** گویند هرگاه $a-b$ مضرب m باشد، یعنی $a-b$ بر m تقسیم‌پذیر باشد.

همنهشت بودن دو عدد a و b به پیمانه‌ی m را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهند :

$a \equiv b$ (پیمانه‌یm)

و یا

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

و می‌خوانند «**a همنهشت با** b **به پیمانه‌ی m است**[1]»

مثال ۱ : (پیمانه‌ی ۶)۱۶≡۳۴ ، زیرا ۱۸= ۱۶–۳۴ بر ۶ تقسیم‌پذیر است. ولی (پیمانه‌ی۶) ۵ ≢ ۸ ، زیرا ۳ = ۵ – ۸ بر ۶ تقسیم‌پذیر نیست.

Δ

۱ــ حتی در مورد اعداد حقیقی مثلاً در مورد مقادیر زاویه یا طول کمان (برحسب رادیان) در دایره‌ی مثلثاتی (پیمانه‌ی ۲π) $x \equiv y$ به‌کار می‌رود.

توجه کنید که نقیض $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) را چنین می‌نویسند :

$a \not\equiv b$ (پیمانه‌ی m)

همان‌طور که در سال قبل دیدیم، همنهشتی یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی اعداد صحیح است و لذا رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. مجموعه‌ی تمام دسته‌های همنهشت به پیمانه‌ی m را با $\frac{\mathbb{Z}}{m}$ یا $\mathbb{Z}_m$ و مجموعه‌ی تمام اعداد صحیحی را که با a همنهشت به پیمانه‌ی m هستند با $[a]$ یا $\bar{a}$ نمایش می‌دهند.

$[a]$ یک دسته‌ی هم‌ارزی و a نماینده‌ی این دسته است. اگر b عضو دیگری از دسته‌ی هم‌ارزی $[a]$ باشد، داریم $[a]=[b]$ و به طور کلی می‌توان ثابت کرد که

$[a]=[b]$

اگر و تنها اگر

$a \equiv b$ (پیمانه‌ی m)

مثلاً در همنهشتی به پیمانه‌ی ۶ داریم :

$[۱۵]=[۳]=[-۳]=\cdots$

$[-۵]=[۱]=[۷]=\cdots$

Δ

اگر چه در دسته‌های همنهشتی، هر عدد از یک دسته‌ی همنهشتی می‌تواند نماینده‌ی آن دسته انتخاب شود اما معمولاً کوچک‌ترین عدد صحیح غیرمنفی متعلق به هر دسته‌ی همنهشتی را به عنوان نماینده انتخاب می‌کنند.

نکته: بنا به تعریف، از $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) نتیجه می‌شود که $a-b$ مضرب m است. یعنی عدد صحیح k موجود است به طوری که $a-b=mk$ یا $a=b+mk$. یعنی تمام اعداد صحیحی که با b به پیمانه‌ی m همنهشت‌اند با افزودن مضربی از m بر b به‌دست می‌آیند. بنابراین :

$[b]=\{b+mk : k \in \mathbb{Z}\}$

مثال ۲ : مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح که به پیمانه‌ی ۷ با عدد ۴ همنهشت‌اند عبارت است از :

$[۴]=\{۴+۷k : k \in \mathbb{Z}\}=\{\cdots,-۱۰,-۳,۴,۱۱,۱۸,\cdots\}$

Δ

با توجه به آنچه گفته شد گزاره‌های زیر همگی معادل‌اند.

ـ a به پیمانه‌ی m با b همنهشت است.

ـ a و b به پیمانه‌ی m همنهشت‌اند.

ـ $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m)

ـ $[a]=[b]$

ـ a و b در یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m قرار دارند.

ـ a–b مضربی از m است.

ـ $m|(a-b)$

و با استفاده از الگوریتم تقسیم می‌توان ثابت کرد که همه‌ی گزاره‌های فوق با گزاره‌ی زیر معادل‌اند :

ـ باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m با هم برابرند. (چرا؟)

۶ـ۲ـ برخی از ویژگی‌های همنهشتی

رابطه‌ی همنهشتی دارای ویژگی‌های مشابهی نظیر جمع و ضرب در $\mathbb{Z}$ است. موارد زیر را قبلاً خوانده‌ایم.

۱ـ اگر $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m)، آن‌گاه برای هر عدد صحیح c

$$a+c \equiv b+c \ (\text{پیمانه‌ی } m)$$

۲ـ اگر $a+c \equiv b+c$ (پیمانه‌ی m)، آن‌گاه $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m)

۳ـ اگر $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) و $c \equiv d$ (پیمانه‌ی m)، آن‌گاه

$$a+c \equiv b+d \ (\text{پیمانه‌ی } m) \text{ و } ac \equiv bd \ (\text{پیمانه‌ی } m)$$

۴ـ هرگاه $a_1 \equiv b_1$ (پیمانه‌ی m) و ... و $a_n \equiv b_n$ (پیمانه‌ی m)، آن‌گاه

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \equiv b_1+b_2+\cdots+b_n \ (\text{پیمانه‌ی } m)$$

و

$$a_1a_2\cdots a_n \equiv b_1b_2\cdots b_n \ (\text{پیمانه‌ی } m)$$

۵ـ هرگاه $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) آن‌گاه برای هر $n \geq 1$، $a^n \equiv b^n$ (پیمانه‌ی m).

مثال ۳: مطلوب است باقی‌مانده‌ی 2^{30} بر ۱۷

از $۱۶ = ۲^۴$ و (پیمانه‌ی ۱۷) ۱ $- \equiv ۱۶$ نتیجه می‌شود که (پیمانه‌ی ۱۷) ۱ $- \equiv ۲^۴$ اما (پیمانه‌ی ۱۷) $^۷(-۱) \equiv {}^۷(۲^۴)$ یعنی (پیمانه‌ی ۱۷) ۱ $- \equiv ۲^{۲۸}$ از طرف دیگر داریم (پیمانه‌ی ۱۷) $۴ \equiv ۲^۲$ و درنتیجه

$$۲^{۳۰} = ۲^{۲۸} \times ۲^۲ \equiv (-۱) \times ۴ \equiv -۴ \ (\text{پیمانه‌ی } ۱۷)$$

اما (پیمانه‌ی ۱۷) $۱۳ \equiv -۴$، پس (پیمانه‌ی ۱۷) $۱۳ \equiv ۲^{۳۰}$ یعنی باقی‌مانده‌ی $۲^{۳۰}$ بر ۱۷، عدد ۱۳ است. Δ

۶ــ۳ــ تقسیم طرفین یک رابطه‌ی همنهشتی بر c

می‌دانیم که هرگاه (پیمانه‌ی m) $a \equiv b$، آنگاه برای هر عدد صحیح c،

$$ac \equiv bc \ (\text{پیمانه‌ی } m)$$

حال عکس این مطلب را بررسی می‌کنیم. یعنی آیا برای هر عدد صحیح c،اگر (پیمانه‌ی m) $ac \equiv bc$ آنگاه (پیمانه‌ی m) $a \equiv b$؟ ابتدا به مثال زیر توجه کنید:

می‌دانیم (پیمانه‌ی۶) $۲۱ \equiv ۳۳$ یعنی (پیمانه‌ی ۶) $۳ \times ۷ \equiv ۳ \times ۱۱$، ولی (پیمانه‌ی ۶) $\frac{۲۱}{۳} \not\equiv \frac{۳۳}{۳}$ اما قضیه‌ی زیر را در این مورد داریم:

قضیه ۱: در رابطه‌ی همنهشتی (پیمانه‌ی m) $ac \equiv bc$ داریم

$$a \equiv b \ (\text{پیمانه‌ی } \frac{m}{d})$$

که در آن $d = (m,c)$.

اثبات: از فرض نتیجه می‌شود که عدد صحیح k وجود دارد که

$$ac - bc = mk$$

یعنی:

$$(a-b)c = mk$$

اگر طرفین این تساوی را بر $d = (m,c)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$(a-b)\frac{c}{d} = \frac{m}{d}k$$

یعنی عدد صحیح $\frac{m}{d}$ ، عدد $\frac{c}{d}(a-b)$ را می‌شمارد. و چون $(\frac{m}{d},\frac{c}{d})=1$ (چرا؟) پس $\frac{m}{d}|(a-b)$ یعنی :

$$a \equiv b \ (\text{پیمانه‌ی } \frac{m}{d})$$

□

مثال ۴: از $2 \equiv 8$ (پیمانه‌ی ۶) نتیجه می‌شود $1 \equiv 4$ (پیمانه‌ی ۳) Δ

۶ــ۴ــ حل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax+by=c$

سؤال دیگری که مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان معادله‌ی

$$(1) \qquad ax+by=c$$

را که با معادله‌ی همنهشتی

$$ax \equiv c \ (\text{پیمانه‌ی } b)$$

هم‌ارز است، در $\mathbb{Z}$ حل کرد؟ در این معادله $a,b,c \in \mathbb{Z}$. به عبارت دیگر، آیا می‌توان عددهای صحیحی چون $x_\circ, y_\circ$ را یافت که

$$(2) \qquad ax_\circ + by_\circ = c$$

اگر عددهای صحیح $x_\circ, y_\circ$ وجود داشته باشند که در رابطه‌ی (۲) صدق کنند، آن‌گاه می‌گوییم **معادله‌ی سیاله‌ی خطی** $ax+by=c$ جواب دارد. در این رابطه قضیه‌ی زیر را داریم :

قضیه‌ی ۲: معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax+by=c$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ جواب دارد اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، عدد c را بشمارد.

اثبات: اگر $d=(a,b)$ و $d|c$ آن‌گاه عدد صحیح k وجود دارد که $c=dk$ و چون d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است، $d=am+bn$ که در آن $m,n \in \mathbb{Z}$. بنابراین

$$c=dk=a(mk)+b(nk)$$

یعنی اعداد صحیح $x_\circ = mk$ و $y_\circ = nk$ در معادله‌ی $ax+by=c$ صدق می‌کنند. پس $ax+by=c$ دارای جواب است. برعکس اگر $ax+by=c$ دارای جواب باشد، اعداد صحیح $x_\circ$ و $y_\circ$ وجود دارند که $ax_\circ+by_\circ=c$. اما چون $d|a$ و $d|b$ درنتیجه $d|ax_\circ+by_\circ$ یعنی $d|c$. □

می‌توان ثابت کرد که اگر $(a,b)=d$ و $x_\circ$ و $y_\circ$ یک جواب برای معادله‌ی خطی $ax+by=c$ باشد، آن گاه تمام جواب‌های آن به‌صورت $y=y_\circ-k\frac{a}{d}$ و $x=x_\circ+k\frac{b}{d}$ است که در آن $k\in\mathbb{Z}$.

در مثال زیر، روشی را برای حل معادله‌های سیاله نشان می‌دهیم :

مثال ۵: شخصی می‌خواهد با بُن، ۵۱۰۰ ریال کتاب بخرد. اگر بُن‌ها، ۵۰۰ ریالی و ۲۰۰ ریالی باشند، چند بُن ۵۰۰ریالی و چند بُن ۲۰۰ ریالی باید بپردازد؟

حل مسأله مستلزم پیدا کردن اعداد صحیح نامنفی x و y است که برای آن‌ها

$$۲۰۰x+۵۰۰y=۵۱۰۰$$

یا

$$۲x+۵y=۵۱$$

چون $(۵,۲)=۱$ و $۱|۵۱$ ، معادله‌ی فوق جواب دارد. می‌نویسیم :

$$x=\frac{۵۱-۵y}{۲}=\frac{۵۰-۴y+۱-y}{۲}=۲۵-۲y+\frac{۱-y}{۲}$$

پس $\frac{۱-y}{۲}$ یک عدد صحیح است، یعنی عددی مانند m وجود دارد که $۱-y=۲m$. یا $y=۱-۲m$. درنتیجه

$$x=۲۵-۲+۴m+m=۵m+۲۳$$

ولی x و y منفی نیستند، پس $۱-۲m\geq ۰$ و $۵m+۲۳\geq ۰$ یا $m\leq\frac{۱}{۲}$ و $m\geq\frac{-۲۳}{۵}=-۴/۶$.

پس m مقادیر ۰ ، ۱-، ۲-، ۳- و۴- را می‌گیرد. یعنی تعداد بن‌های ۲۰۰ ریالی و ۵۰۰ ریالی به‌ترتیب می‌تواند جفت‌های زیر باشند :

۹,۳   ۷,۸   ۵,۱۳   ۳,۱۸   ۱,۲۳

Δ

مجله‌ی ریاضی

تابع حسابی اویلر

تعریف: برای هر عدد طبیعی n، $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اول‌اند. این ضابطه، تابعی روی اعداد طبیعی تعریف می‌کند که آن را **تابع حسابی اویلر** می‌گویند.

بدیهی است که اگر p یک عدد اول باشد آن‌گاه $\phi(p) = p-۱$.

قضیه‌ی اویلر: اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد که $(a,m)=۱$ آن‌گاه

$a^{\phi(m)} \equiv ۱$ (پیمانه‌ی m)

قضیه‌ی ویلسن: اگر p عددی اول باشد آن‌گاه

$(p-۱)! \equiv -۱$ (پیمانه‌ی p)

۶ــ۵ــ تمرین‌ها

۱ــ دو عدد a و b به‌صورت‌های زیر نوشته شده‌اند :

$a = ۷k+۵ \ , \ \ b = ۷k'-۲$

دسته‌ی همنهشتی $a+۲b$ را به پیمانه‌ی ۷ مشخص کنید.

۲ــ هرگاه $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) و d یک مقسوم‌علیه m باشد، نشان دهید $a \equiv b$ (پیمانه‌ی d) .

۳ــ ثابت کنید

الف) اگر r باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر m باشد، آنگاه $a \equiv r$ (پیمانه‌ی m) .

ب) اگر $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) و c عدد صحیح باشد، آنگاه

$ac \equiv bc$ (پیمانه‌ی m)

پ) اگر $a+b \equiv c$ (پیمانه‌ی m) ، آنگاه $a \equiv c-b$ (پیمانه‌ی m)

ت) اگر m و c نسبت به هم اول باشند و $ac \equiv bc$ (پیمانه‌ی m) ، آنگاه

$a \equiv b$ (پیمانه‌ی m)

۴ـ ثابت کنید که برای هر دو عدد صحیح a و b

الف) $(a \pm b)^{۲} \equiv a^{۲} + b^{۲}$ (پیمانه‌ی ab)

ب) $(a \pm b)^{۳} \equiv a^{۳} \pm b^{۳}$ (پیمانه‌ی ab)

۵ـ ثابت کنید $۲^{۱۱} - ۱$ بر ۲۳ تقسیم پذیر است.

۶ـ آخرین رقم سمت راست هریک از اعداد $۳^{۴۲۴}$ و $۷^{۱۰۱}$ را به‌دست آورید.

۷ـ برای هریک از معادلات سیاله‌ی زیر یا تمام جواب‌ها را به‌دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.

الف) $۲x + ۵y = ۱۱$ ب) $۱۷x + ۱۳y = ۱۰۰$

پ) $۲۱x + ۱۴y = ۱۴۷$ ت) $۶۰x + ۱۸y = ۹۷$

۸ـ پستخانه‌ای فقط تمبرهای ۱۴۰ و ۲۱۰ ریالی برای فروش دارد. برای چسباندن تمبر به بسته‌هایی که مقدار تمبر لازم برای آن‌ها هریک از مقادیر زیر است، در صورت امکان ترکیبی از این دو نوع تمبر تعیین کنید.

الف) ۳۵۰۰ ریال ب) ۴۰۰۰ ریال

مجله‌ی ریاضی

برای اعداد طبیعی $n \geq ۳$ معادله‌ی سیاله‌ی $x^n + y^n = z^n$ هیچ جواب غیربدیهی در بین اعداد صحیح ندارد.

بسیاری ازمطالعات و پیشرفت‌های نظریه‌ی اعداد مدیون تلاش برای حل این مسأله بوده که فرما در قرن هفدهم در حاشیه‌ی کتاب حساب دیوفانتوسی خود ادعا کرده که این مسأله را حل کرده است. در سال ۱۹۹۳ با استفاده از نظریه‌های پیشرفته‌ی ریاضی آندرو وایلز حلی برای آن ارائه کرد که پس از چندی اشکالی در آن پیدا شد. ولی سرانجام در سپتامبر ۱۹۹۴ (شهریور ماه ۱۳۷۳) اشکال این حل به‌وسیله‌ی خود وایلز و با همکاری یکی از همکارانش به نام تیلر برطرف شد.

مراجع

1 ـ D.M. Burton, Elementary Number Theory, Allyn and Bacon, Inc. 1976.

2 ـ K.H. Rosen , Elementary Number Theory and its Applications, 3rd ed., Addison Wesley 1992.

۳ــ ویلیام و. آدامز و لری جوئل گولدشتین، آشنایی با نظریه‌ی اعداد، ترجمه‌ی آدینه محمدنارنجانی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۲.

۴ــ ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری، حساب استدلالی، چاپ ششم مؤسسه مطبوعاتی علی‌اکبر علمی ۱۳۴۷.

۵ــ غلامرضا دانش ناروئی و میرزا جلیلی، ریاضیات جدید سال چهارم متوسطه عمومی ریاضی‌ــ فیزیک. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش ۱۳۶۰.

۶ــ غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد. جلد اول ــ انتشارات دهخدا ۱۳۵۳.

قسمت سوم

مباحثی دیگر از ترکیبیات

مقدمه

در قسمت اول با نظریه‌ی گراف‌ها که یکی از مباحث ترکیبیات است آشنا شدیم. در این قسمت با مباحثی دیگر از ترکیبیات آشنا می‌شویم. ترکیبیات معمولاً با مجموعه‌های متناهی سروکار دارد و لذا یکی از مباحث ترکیبیات، شمارش است. در اینجا با بعضی از ابزارهای شمارش آشنا می‌شویم. کلاً به مقدمات بسنده می‌کنیم، با این امید که دانش‌آموزان با این آشنایی اولیه انگیزه‌ی کافی پیدا کنند که خود در این مباحث به مطالعه بپردازند.

در فصل ۷ نشان می‌دهیم گراف‌ها چگونه می‌توانند به فهم مطالب دیگر ریاضی کمک کنند. گراف‌ها و ماتریس‌های متناظر با آن‌ها با شکل و شمایل شهودی که دارند به تجسم مفاهیم انتزاعی کمک می‌کنند. یکی از دلایلی که همه‌ی ما از هندسه خوشمان می‌آید شهودی‌بودن آن است. گراف نیز همان امتیاز را دارد. به‌علاوه چون در رسم نمودار گراف طول یال‌ها و یا مکان رأس‌ها مطرح نیست درک شهودی ساده‌تر می‌شود. در بخش ۷ــ۱ بعضی از این استفاده‌های شهودی را مطرح می‌کنیم. در مطالعه‌ی مجموعه‌ها نیز می‌توان نمودارهایی به آن‌ها نسبت داد. این نمودارها به درک مفاهیم کمک زیادی می‌کنند. با استفاده از این نمودارها حتی می‌توانیم مفاهیمی را که یاد گرفته‌ایم تعمیم دهیم. بخش ۷ــ۳ به این موضوع اختصاص دارد. با تعمیم این مفاهیم یک ابزار شمارشی به نام اصل شمول و عدم شمول را خواهیم دید. در فصل ۸ یکی دیگر از مباحث ریاضی به نام دنباله‌های بازگشتی را به عنوان یک ابزار شمارشی به‌کار خواهیم گرفت.

فصل ۷

مدل‌های شهودی و تجسمی در ترکیبیات

۷ــ۱ــ رابطه‌ها و گراف‌ها

مفاهیم مربوط به رابطه را که در کتاب جبر و احتمال سال سوم دیده‌ایم یادآوری می‌کنیم.

تعریف: هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه یک **رابطه** از A به B عبارت است از زیرمجموعه‌ای از $A\times B$. زیرمجموعه‌های $A\times A$ را **رابطه‌های روی** A می‌گویند.

مثال ۱: روی مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک رابطه‌ی R را می‌توان چنین تعریف کرد :

aRb یا $(a,b)\in R$ هر گاه $a\le b$.

این رابطه همان رابطه‌ی معمولی «کوچکتر از یا مساوی با» روی $\mathbb{Z}$ است که روی Q، مجموعه‌ی اعداد گویا، و روی $\mathbb{R}$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی، نیز تعریف می‌شود. Δ

مثال ۲: برای هر دو عضو $x,y\in\mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم :

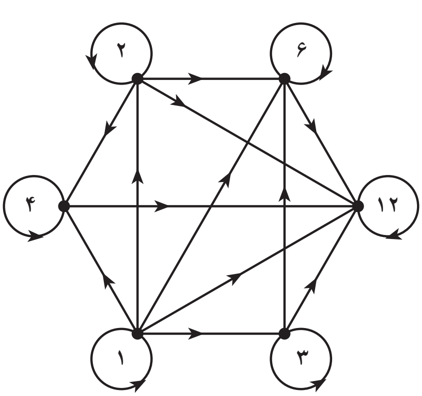
$(x,y)\in R$ یا xRy هرگاه $x-y$ مضربی از ۷ باشد.

پس داریم : $9R2$ و $-3R11$، ولی $3\not R 7$. Δ

مثال ۳: مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ مفروض است. به‌ازای هر دو عضو $a,b\in A$ تعریف می‌کنیم : aRb هرگاه $a|b$. Δ

حال فرض کنید A یک مجموعه‌ی متناهی و R یک رابطه روی A باشد. به R گراف جهت‌دار G را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم. رأس‌های G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb.

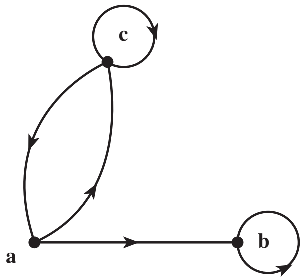
به‌عنوان مثال، شکل ۱، گراف مربوط به رابطه‌ای را که در مثال ۳ داده شده است نشان می‌دهد. مثلاً رأس ۱ به تمام رئوس، حتی به خود ۱، وصل است زیرا عدد ۱ تمام اعداد صحیح را می‌شمارد.



شکل ۱ــ گراف جهت‌دار رابطه‌ی عادکردن

متقابلاً هرگراف جهت‌دار نشانگر یک رابطه است. مثلاً از گراف شکل ۲ نتیجه می‌شود که رابطه‌ای مانند R روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ تعریف شده است و داریم :

. aRb , aRc , bRb , cRa , cRc



شکل ۲ــ گراف جهت‌دار یک رابطه

این تناظر بین گراف‌ها(ی جهت‌دار) و رابطه‌ها به درک بسیاری از ویژگی‌های رابطه‌ها کمک می‌کند. مثلاً می‌توانید بازتابی، متقارن‌بودن یا نبودن رابطه‌ها را فوراً از روی گراف جهت‌دار مربوط تشخیص دهید. این ویژگی‌ها در درس‌های سال‌های قبل تعریف شده‌اند. یکی از ویژگی‌های رابطه‌ها که کاربرد فراوان دارد خاصیت پاد متقارن است. رابطه‌ی R را وقتی **پاد متقارن** گوییم که به‌ازای هر زوج مرتب (a,b)، اگر $(a,b)\in R$ و $(b,a)\in R$ آن‌گاه $a=b$. مثلاً رابطه‌ی «کوچکتر از یا مساوی با» در مثال ۱ و رابطه‌ی «عادکردن» در مثال ۳ دو رابطه‌ی پاد متقارن‌اند ولی رابطه‌ی مثال ۲

پاد متقارن نیست.

حال ارتباط این ویژگی‌ها را با گراف‌های جهت‌دار بیان می‌کنیم.

یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن در هر رأس دارای یک طوقه باشد. طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a نیز یالی موجود باشد.

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a یالی موجود نباشد.

یک رابطه ترایایی است اگر و تنها اگر در گراف جهت‌دار متناظر با آن اگر از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از رأس b به رأسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از رأس a به رأس c نیز یک یال وجود داشته باشد.

مثال ۴: با توجه به شکل ۲ معلوم می‌شود که رابطه‌ی متناظر با این گراف جهت‌دار هیچ‌یک از ویژگی‌های فوق را ندارد (چرا؟). درصورتی که گراف جهت‌دار شکل ۱ متناظر با رابطه‌ای است که دارای ویژگی‌های بازتابی، پادمتقارن‌بودن، و ترایایی است. Δ

۷ـ۲ـ رابطه‌ها و ماتریس‌ها

در قسمت گراف‌ها به هر گراف یک ماتریس صفر و یک به‌نام ماتریس مجاورت نسبت داده شد. ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار هم به‌طور مشابه تعریف می‌شود. مثلاً ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۲ به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

پس می‌توان این ماتریس را متناظر با رابطه‌ی مربوط به شکل ۲ گرفت. توجه کنید که درایه‌ی ijام ماتریس متناظر مساوی با ۱ است اگر و تنها اگر iRj.

اکنون می‌توانیم ویژگی‌های مربوط به رابطه‌ها را به زبان ماتریس‌ها بیان کنیم. مثلاً ویژگی بازتابی یعنی اینکه همه‌ی درایه‌های قطر اصلی ماتریس ۱ باشند. بقیه‌ی ویژگی‌ها را به زبان ماتریس بیان کنید.

در این فصل صرفاً ماتریس‌های صفر و یک را در نظر می‌گیریم. اکنون یک عمل جمع و یک عمل ضرب برای اعضای مجموعه‌ی دو عضوی $\{۰,۱\}$ تعریف می‌کنیم که از روی آن «توان دوم» را برای ماتریس‌ها تعریف خواهیم کرد. این توان دوم با آن‌چه که در جبر خطی دیده‌ایم فرق دارد.

تعریف: روی مجموعه‌ی $\{۰,۱\}$ دو عمل $\dot{+}$ و $\odot$ موسوم به **عمل‌های بولی** را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$۱\dot{+}۰=۰\dot{+}۱=۱ \quad , \quad ۰\dot{+}۰=۰ \quad , ۱\dot{+}۱=۱$$

$$۱\odot۱=۱ \quad , \quad ۱\odot۰=۰\odot۱=۰ \odot ۰=۰$$

با توجه به تعریف بالا، توان دوم ماتریس $M=[m_{ij}]_{n\times n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^{(۲)}=[m_{i۱}\odot m_{۱j}\dot{+}m_{i۲}\odot m_{۲j}\dot{+}\cdots\dot{+}m_{in}\odot m_{nj}]_{n\times n}.$$

به عبارت دیگر برای به دست‌آوردن توان دوم یک ماتریس که در این‌جا تعریف کردیم مانند توان دوم معمولی در ماتریس‌ها عمل می‌کنیم ولی در نهایت به جای هر درایه‌ی غیرصفر که به‌دست آمده باشد عدد ۱ قرار می‌دهیم.

مثال ۵: اگر $M=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم: $M^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

Δ

تعریف: هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی A باشد **ترکیب رابطه‌ی** RoR، رابطه‌ای روی A است که با قاعده‌ی زیر تعریف می‌شود:

$a(RoR)c$ هرگاه عضوی مانند $b\in A$ وجود داشته باشد که aRb و bRc.

با توجه به تعریف‌های فوق قضیه‌ی زیر را می‌توان به سادگی اثبات کرد.

قضیه‌ی ۱: فرض کنید A یک مجموعه‌ی n عضوی، $n\in\mathbb{N}$ و R یک رابطه روی A باشد. هرگاه $M(R)$ ماتریس متناظر R باشد داریم:

الف) $M(R)=[0]_{n\times n}$ (یعنی همه‌ی درایه‌های $M(R)$ صفرند) اگر و تنها اگر $R=\phi$ ؛

ب) $M(R)=[1]_{n\times n}$ (یعنی همه‌ی درایه‌های $M(R)$ یک‌اند) اگر و تنها اگر $R=A\times A$ ؛

پ) $M(RoR)=[M(R)]^{(2)}$.

اثبات: بند (الف) و (ب) بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند. برای اثبات بند (پ)، اول فرض کنید $i(RoR)j$. پس عضوی مانند $k\in A$ وجود دارد به‌طوری‌که iRk و kRj. پس درایه‌های ikام و kjام در ماتریس M مساوی با ۱ هستند. درنتیجه درایه‌ی ijام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر با ۱ است. حال به‌عکس اگر درایه‌ی ijام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر با ۱ باشد یعنی

$$m_{i1}\odot m_{1j}\dotplus m_{i2}\odot m_{2j}\dotplus\cdots\dotplus m_{in}\odot m_{nj}=1$$

آن‌گاه حداقل یکی از جمعوندها باید مساوی با ۱ باشد. مثلاً $m_{ik}\odot m_{kj}=1$. از آن‌جا $m_{ik}=m_{kj}=1$ ، که نتیجه می‌شود : kRj و iRk. پس بنا به تعریف خواهیم داشت $i(RoR)j$.

□

مثال۶: مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4\}$ و رابطه‌ی R روی A به‌صورت

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبه‌ی RoR.

داریم

$$M(R)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

پس :

$$[M(R)]^{(2)}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(RoR)$$

و از آن‌جا $RoR=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$ Δ

تعریف: فرض کنید ماتریس‌های صفر و یک $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ از اندازه‌ی $m\times n$ باشند. گوییم A **کوچکتر از یا مساوی** با B است و می‌نویسیم $A< B$ هرگاه به‌ازای هر $1\le i\le m$ و هر $1\le j\le n$ داشته باشیم $a_{ij}\le b_{ij}$.

روشن است که اگر M_1 و M_2 ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های R_1 و R_2 روی یک مجموعه‌ی

A باشند، آنگاه $R_1 \subseteq R_2$ اگر و تنها اگر $M_1 < M_2$.

قضیه‌ی ۲: مجموعه‌ی n عضوی A، $n \in \mathbb{N}$ ، و رابطه‌ی R روی آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M ماتریس متناظر با این رابطه باشد. آنگاه

(الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_n < M$. (I_n ماتریس همانی $n \times n$ است).

(ب) Rمتقارن است اگر و تنها اگر $M = M^T$. (ماتریس M^T ترانهاده‌ی M است و آن ماتریسی است که از قراردادن سطرهای M به جای ستون‌های M، با حفظ ترتیب، به‌دست می‌آید.)

(پ) R ترایایی است اگر و تنها اگر $M^{(2)} < M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و تنها اگر $M \wedge M^T < I_n$. (ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مؤلفه به مؤلفه تشکیل می‌شود)

اثبات: هرکدام از حکم‌های فوق با توجه به تعریف‌های مربوط به سادگی اثبات می‌شوند. ما دو حکم آخر را ثابت می‌کنیم.

برای اثبات (پ)، فرض کنید $M^{(2)} < M$. باید نشان دهیم R ترایایی است. هر گاه xRy و yRz، آنگاه در ماتریس M، درایه‌ی سطر xام و ستون yام و همچنین درایه‌ی سطر yام و ستون zام برابر ۱ است. درنتیجه درایه‌ی واقع در سطر xام و ستون zام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر ۱است. چون $M^{(2)} < M$ پس درایه‌ی سطر xام و ستون zام ماتریس M نیز باید ۱ باشد یعنی xRz.

به عکس، فرض کنید R ترایایی باشد. باید نشان دهیم که $M^{(2)} < M$. فرض کنید m_{xz} ، درایه‌ی واقع در سطر xام و ستون zام در ماتریس $M^{(2)}$ ، مساوی ۱ باشد، آن‌گاه باید $y \in A$ وجود داشته باشد که در ماتریس M : $m_{yz} = 1$ و $m_{xy} = 1$. درنتیجه باید xRy و yRz و چون R ترایایی است xRz. پس $m_{xz} = 1$. یعنی نشان داده‌ایم که $M^{(2)} < M$.

برای اثبات حکم (ت)، فرض کنید R پاد متقارن باشد. اگر به ازای دو عضو متمایز i و j داشته باشیم $(i,j) \notin R$ آنگاه درایه‌ی ijام در M و درنتیجه در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. اگر $(i,j) \in R$ آنگاه $(j,i) \notin R$. یعنی اگر درایه‌ی ijام $(i \neq j)$ در M مساوی با ۱ باشد آنگاه درایه‌ی jiام در M مساوی با ۰ است. پس در این صورت نیز درایه‌ی ijام در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. یعنی $M \wedge M^T < I_n$.

به عکس از $M \wedge M^T < I_n$ نتیجه می‌شود که همه‌ی درایه‌های غیرقطری $M \wedge M^T$ صفرند. یعنی به‌ازای $i \neq j$ داریم $m_{ij}.m_{ji} = 0$. در این صورت فقط سه حالت زیر امکان‌پذیرند :

$m_{ij}=m_{ji}=0$ یا $m_{ji}=1$, $m_{ij}=0$ و یا $m_{ij}=1, m_{ji}=0$. که نتیجه می‌شود : اگر iRj و jR_i آنگاه $i=j$.

اثبات بقیه‌ی حکم‌ها را به‌عنوان تمرین به عهده دانش‌آموزان می‌گذاریم. □

قضیه‌های ۱ و ۲ ارتباط بین رابطه‌ها و ماتریس‌های صفر و یک را نشان می‌دهند. این قضیه‌ها با وجود سادگی اهمیت زیادی دارند. زیرا بهترین راه معرفی یک رابطه به کامپیوتر از طریق ماتریس صفر و یک است. از طریق حکم‌های فوق می‌توان با کامپیوتر ویژگی‌های هر رابطه‌ای را بررسی کرد.

مثال ۷: با استفاده از قضیه‌ی ۲ می‌توان یک الگوریتم نوشت و با برنامه‌ی کامپیوتری هم‌ارزی بودن رابطه‌ای را که روی یک مجموعه‌ی متناهی A داده شده است امتحان کرد. یعنی رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است اگر و تنها اگر M، ماتریس صفر و یک متناظر با آن، دارای شرایط زیر باشد :

(الف) $I_n < M$

(ب) $M = M^T$

(پ) $M^{(2)} < M$

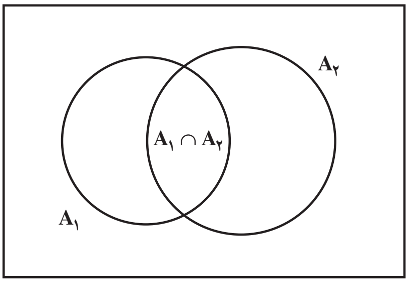
Δ

۷ــ۳ــ اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای شمارش به اصل شمول و عدم شمول معروف است. حالت خاص آن را قبلاً در کتاب جبر و احتمال دیده‌اید. اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد تعداد عناصر آن را با $|A|$ نشان می‌دهیم. فرض کنید A_1 و A_2 دو مجموعه‌ی متناهی باشند. داریم :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \qquad (1)$$

با توجه به شکل ۳ رابطه‌ی (۱) درست است، زیرا در مجموع $|A_1|+|A_2|$ هر عضوی که فقط به یکی از مجموعه‌های A_1 یا A_2 متعلق باشد یک بار به حساب می‌آید ولی هر عضوی که به هر دو مجموعه‌ی A_1 و A_2 تعلق داشته باشد دو بار شمرده می‌شود. پس با کم کردن $|A_1 \cap A_2|$ از حاصل جمع $|A_1|+|A_2|$ هر عضو از $A_1 \cup A_2$ دقیقاً یک بار به‌حساب می‌آید.



شکل ۳ــ نمودار ون برای دو مجموعه

رابطه‌ی (۱) وجه تسمیه‌ی «شمول و عدم شمول» را نیز توجیه می‌کند. زیرا در شمارش اعضای مجموعه‌ی $A_۱ \cup A_۲$، اول همه‌ی اعضای $A_۱$ و $A_۲$ را به‌حساب می‌آوریم (شمول) ولی چون در این صورت اعضای $A_۱ \cap A_۲$ دوبار به حساب می‌آیند آن‌ها را از شمارش خود خارج می‌کنیم (عدم شمول).

مثال ۸: چند عضو از مجموعه‌ی $A = \{n \in \mathbb{N} : ۱ \leq n \leq ۶۳۰۰\}$ نه بر ۵ تقسیم‌پذیرند و نه بر ۳؟

فرض کنید $A_۱$ زیرمجموعه‌ی A متشکل از مضارب ۳ و $A_۲$ زیرمجموعه‌ی A متشکل از مضارب ۵ باشند. می‌خواهیم $|\overline{A_۱ \cup A_۲}|$ را پیدا کنیم($\overline{B}$ متمم[۱] مجموعه‌ی B را نمایش می‌دهد).

داریم :

$$|A_۱| = \frac{۶۳۰۰}{۳} = ۲۱۰۰$$

$$|A_۲| = \frac{۶۳۰۰}{۵} = ۱۲۶۰$$

و چون $A_۱ \cap A_۲$ مجموعه‌ی اعدادی هستند که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم‌پذیرند پس :

$$|A_۱ \cap A_۲| = \frac{۶۳۰۰}{(۳)(۵)} = ۴۲۰$$

درنتیجه با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم :

$$|A_۱ \cup A_۲| = ۲۱۰۰ + ۱۲۶۰ - ۴۲۰$$

$$= ۲۹۴۰$$

و از آن‌جا $|\overline{A_۱ \cup A_۲}| = ۶۳۰۰ - ۲۹۴۰ = ۳۳۶۰$. Δ

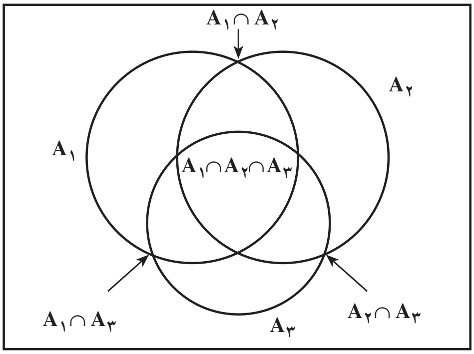
حال برای $n = ۳$ اصل شمول و عدم شمول را مطالعه می‌کنیم.

قضیه‌ی ۳: فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سه زیرمجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی A باشند. داریم

$$\begin{aligned}|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| &= |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| \\ &\quad - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| \qquad (۲)\end{aligned}$$

۱ــ متمم مجموعه‌ی B را گاهی با B' یا B^c هم نمایش می‌دهند. به‌جای متمم گاهی اصطلاح مکمل را به‌کار می‌برند.

اثبات: نشان می‌دهیم که هر عضو x از A به تعداد مساوی در دو طرف رابطه‌ی (۲) به‌حساب می‌آید. به شکل ۴ توجه کنید.



شکل ۴ــ نمودار ون برای سه مجموعه

دو حالت داریم :

حالت ۱: اگر x متعلق به هیچ‌کدام از مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 نباشد، آن‌گاه x در دو طرف رابطه‌ی (۲)، صفر بار به حساب می‌آید.

حالت ۲: فرض کنید x به s مجموعه از مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 تعلق داشته باشد ($1 \le s \le 3$). آن‌گاه x یک بار در طرف چپ به حساب می‌آید، و در طرف راست نیز

اگر $s = 1$، یک بار به حساب می‌آید،

اگر $s = 2$، باز هم $2 - 1 = 1$ بار به حساب می‌آید و

اگر $s = 3$، در این صورت هم $3 - 3 + 1 = 1$ بار به حساب می‌آید. □

اثبات بالا را می‌توان به n مجموعه تعمیم داد و قضیه‌ای بیان کرد که به اصل شمول و عدم شمول معروف است. در مثال‌های زیر خواهیم دید که چگونه بعضی از مسائل کلاسیک شمارش را می‌توان با اصل شمول و عدم شمول حل کرد.

مثال ۹: تعداد توابع پوشا ازیک مجموعه‌ی ۴عضوی B به یک مجموعه‌ی ۳عضوی A را پیدا کنید. باید توجه کرد که منظور از تابع $f: B \longrightarrow A$ تابعی است که روی همه‌ی اعضای B تعریف شده است.

فرض کنید $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ و $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. مجموعه‌ی تمام توابع $f: B \to A$ را با S نمایش می‌دهیم و ابتدا $|S|$ را محاسبه می‌کنیم. به ازای هر $b_j \in B$ برای $f(b_j)$ سه امکان وجود دارد، زیرا $f(b_j)$ امکان دارد a_1، a_2 یا a_3 باشد. این امکان‌ها به ازای هر دو عضو متمایز B به هم وابسته نیستند یعنی مثلاً به‌ازای هر انتخاب برای هر سه عضو B، عضو چهارم می‌تواند دارای

سه انتخاب باشد. پس تعداد کل این توابع $۸۱ = ۳.۳.۳.۳$ است. حال فرض کنید A_i مجموعه‌ی توابعی باشد که هیچ عضوی از B را به a_i نسبت نمی‌دهند.

یعنی:
$$A_i = \{f \in S : a_i \notin f(B)\} \qquad i = ۱,۲,۳$$

منظور شمارش تعداد اعضای مجموعه‌ی $\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}$ است. از فرمول (۲) در قضیه‌ی ۳ استفاده می‌کنیم. مشابه استدلال فوق داریم

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۴ = ۱۶$$

و
$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱$$

و
$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

پس:
$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۲^۴ + ۲^۴ + ۲^۴ - (۱+۱+۱) + ۰ = ۴۵$$

و از آن‌جا
$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = ۸۱ - ۴۵ = ۳۶$$

که تعداد توابع پوشای از B به A است. Δ

برای حل معادلات با جواب‌های صحیح و با محدودیت‌های مختلف، می‌توان از اصل شمول و عدم شمول استفاده کرد. برای توضیح این روش، اول به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰: فرض کنید k نوع مختلف گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. می‌توان ثابت کرد که تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن تکرار نیز مجاز است برابر است با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ و مساوی است با $\binom{n+k-۱}{n}$.

اگر x_i را تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع iام بگیریم به‌سادگی دیده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین انتخاب‌ها و جواب‌های معادله‌ی فوق موجود است. اثبات برابری تعداد انتخاب‌ها با مقدار داده شده را به عنوان‌تمرین به عهده‌ی دانش‌آموزان گذاشته‌ایم. باید دقت کرد که در این مثال حالت‌هایی را هم در نظر گرفته‌ایم که یک یا چند نوع گل را اصلاً انتخاب نکرده باشیم. Δ

مثال ۱۱: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ را به‌طوری که به‌ازای $i = ۱,۲,۳$ ، $۰ \le x_i \le ۲$ باشد پیدا کنید.

مجموعه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{\text{جواب‌های معادله‌ی فوق به‌شرطی که } x_i > ۲ \text{ باشد}\}, \quad i = ۱,۲,۳$$

باید تعداد مجموعه‌ی $\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}$ را پیدا کنیم. بنابر فرمول (۲) از قضیه‌ی ۳ داریم:

$$\begin{aligned}|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| &= |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| \\ &= |S| - |A_۱| - |A_۲| - |A_۳| + |A_۱ \cap A_۲| + |A_۱ \cap A_۳| + \\ &\quad |A_۲ \cap A_۳| - |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|\end{aligned}$$

که در آن S مجموعه‌ی تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی فوق است. پس بنا به مثال ۱۰ داریم.

$$|S| = \binom{۳+۴-۱}{۴} = ۱۵$$

از طرف دیگر مثلاً تعداد $A_۱$ مساوی است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$. زیرا کافی است که در جواب معادله‌ی اخیر به $x_۱$، عدد ۳ اضافه کنیم تا یک جواب معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ با شرط $x_۱ > ۲$ به‌دست آید و برعکس. اما به‌سادگی دیده می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$ مساوی است با ۳. پس $|A_۱| = ۳$ و به همین ترتیب $|A_۲| = |A_۳| = |A_۱| = ۳$.

از طرف دیگر داریم $A_۱ \cap A_۲ = A_۱ \cap A_۳ = A_۲ \cap A_۳ = \phi$

همین‌طور $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = \phi$. پس $|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = ۱۵ - ۳ - ۳ - ۳ = ۶$. در حقیقت ۶ جواب فوق چنین‌اند:

$$(۰,۲,۲), (۱,۱,۲), (۱,۲,۱), (۲,۰,۲), (۲,۱,۱), (۲,۲,۰)$$

Δ

در قسمت نظریه‌ی اعداد با **تابع حسابی اویلر** ϕ به‌عنوان «مجله‌ی ریاضی» آشنا شده‌ایم. منظور از $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد صحیح و مثبت m که کوچکتر از n یا مساوی با آن بوده و m و n نسبت به هم اول باشند. قضیه‌ی زیر حالت خاصی از قضیه‌ای کلی درباره‌ی این تابع است.

قضیه‌ی ۴: فرض کنید عدد صحیح و مثبت n برابر با حاصل‌ضرب سه عدد اول و متمایز به‌صورت زیر باشند:

$$n = p_۱ p_۲ p_۳$$

در این صورت

$$\phi(n) = n(۱ - \frac{۱}{p_۱})(۱ - \frac{۱}{p_۲})(۱ - \frac{۱}{p_۳})$$

اثبات: مجموعه‌های A_i را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$$A_i = \{m : ۱ \le m \le n, p_i | m\}, \quad i = ۱,۲,۳$$

حال اصل شمول و عدم شمول را برای مجموعه‌های A_i می‌نویسیم. داریم :

$\phi(n) = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}|$ و برای $i = ۱,۲,۳$

$$A_i = \{p_i, ۲p_i, ۳p_i, \ldots, (\frac{n}{p_i})p_i\}$$

پس $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. به همین ترتیب به‌ازای $i \neq j$ ، $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$ ، و

$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \frac{n}{p_۱ p_۲ p_۳}$. اکنون از رابطه ی (۲) در قضیه‌ی ۳ نتیجه می‌گیریم که :

$$n - \phi(n) = |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = \frac{n}{p_۱} + \frac{n}{p_۲} + \frac{n}{p_۳} - \frac{n}{p_۱ p_۲} - \frac{n}{p_۱ p_۳} - \frac{n}{p_۲ p_۳} + \frac{n}{p_۱ p_۲ p_۳}$$

$$\phi(n) = n - \frac{n}{p_۱} - \frac{n}{p_۲} - \frac{n}{p_۳} + \frac{n}{p_۱ p_۲} + \frac{n}{p_۱ p_۳} + \frac{n}{p_۲ p_۳} - \frac{n}{p_۱ p_۲ p_۳}$$

$$= n(۱ - \frac{۱}{p_۱})(۱ - \frac{۱}{p_۲})(۱ - \frac{۱}{p_۳})$$

□

مثال ۱۲: ثابت کنید $\phi(۴۲) = ۱۲$.

چون $۴۲ = ۲.۳.۷$ ، حکم از قضیه‌ی ۴ به‌دست می‌آید :

$$\phi(۴۲) = ۴۲(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})(۱ - \frac{۱}{۷}) = ۱۲$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً هم بررسی کرد. زیرا تمام اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۴۲ که نسبت به آن اول هستند عبارت‌اند از :

۱,۵,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۵,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱

Δ

۷ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$. برای هریک از حالت‌های زیرگرافی رسم کنید که رابطه‌ی متناظر با آن

الف) بازتابی و متقارن باشد ولی ترایایی نباشد،

ب) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد،

پ) متقارن و ترایایی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب‌های خود را با ماتریس‌های متناظر امتحان کنید.

۲ــ فرض کنید $A=\{w,x,y,z\}$. تعداد رابطه‌های روی A با ویژگی‌های داده‌شده در هریک از حالت‌های زیر را بیابید :

الف) بازتابی ؛

ب) متقارن ؛

پ) بازتابی و متقارن ؛

ت) بازتابی و شامل (x,y) ؛

ث) پاد متقارن ؛

ج) پاد متقارن و شامل (x,y) ؛

چ) متقارن و پاد متقارن ؛

ح) پاد متقارن، متقارن و بازتابی ؛

خ) هم‌ارزی (راهنمایی : تعداد افرازهای مختلف را پیدا کنید).

۳ــ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. دو رابطه‌ی R و S روی A به‌صورت زیر داده شده‌اند.

$$R=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۴)\},$$

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴)\}$$

رابطه‌های ROR و SOS را پیدا کنید.

۴ــ بندهای (الف) و (ب) از قضیه‌ی ۱ را اثبات کنید.

۵ــ بندهای (الف) و (ب) از قضیه‌ی ۲ را اثبات کنید.

۶ــ فرض کنید R یک رابطه‌ی بازتابی روی مجموعه‌ی متناهی A باشد. نشان دهید که رابطه‌ی RoR نیز بازتابی است.

۷ــ ماتریس صفر و یک $E=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد ماتریس‌های صفر و یک F با شرط $E < F$ را بیابید.

۸ـ با استفاده از قضیه‌هایی که در این فصل خوانده‌اید نشان دهید که آیا رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است یا خیر.

$$R=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۱),(۳,۱)\}$$

۹ــ یک ماتریس $n\times n$ از اعداد متمایز مثلاً $۱,۲,۳,\ldots,n^۲$ را **یک مربع وفقی** (یا مربع جادویی) می‌نامیم، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصل‌جمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی، و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند. به‌عنوان مثال یک مربع وفقی ۳×۳ در زیر نشان داده شده است.

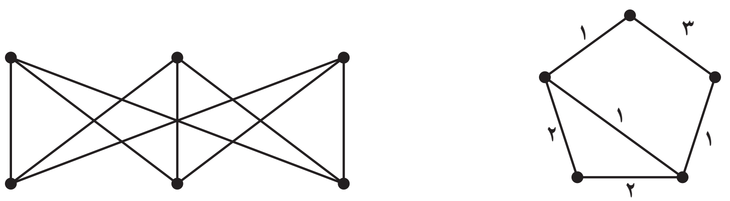
۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

ثابت کنید که در هر مربع وفقی ۳×۳ که از اعضای $۱,۲,۳,\ldots,۹$ تشکیل شده است عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است.

۱۰ــ گراف G داده شده است. یک **برچسب‌گذاری جادویی** G عبارت است از متناظرکردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال‌های G به‌طوری که حاصل‌جمع اعداد متناظر با یال‌های مارّ بر هر رأس عددی ثابت باشد. در گرافی که در شکل ۵ (الف) داده شده است اعدادی که روی یال‌ها نوشته شده‌اند یک برچسب‌گذاری جادویی را نشان می‌دهد، زیرا حاصل‌جمع اعداد متناظر به یال‌های مارّ بر هر رأس مساوی با ۴ است.

با استفاده از مربع وفقی ۳×۳ یک برچسب‌گذاری جادویی برای گراف شکل ۵ (ب) به‌دست آورید.

۱۱ــ ثابت کنید که تعداد انتخاب n گل از k نوع مختلف گل، که تکرار نیز مجاز باشد مساوی است با $\binom{n+k-۱}{n}$.



(الف) یک برچسب‌گذاری جادویی

(ب)

شکل ۵

۱۲ــ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت هریک از معادلات زیر را پیدا کنید.

الف) $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$

ب) $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \quad , \; ۲ \leq x_۱ \leq ۳ \quad , \; ۴ \leq x_۲ \leq ۸ \quad , \; x_۳ \geq ۱$

پ) $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۴ \; , \; ۱ \leq x_i \leq ۷ \quad , \; i = ۱,۲,۳$

۱۳ــ مطلوب است تعداد شماره‌ی شناسنامه‌های پنج‌رقمی که در آن‌ها هریک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند.

۱۴ــ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به‌دست آمده است : ۶۰ نفر آن‌ها مجله‌ی A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجله‌ی B، ۵۰ نفر مجله‌ی C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B، ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجله‌ی A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که :

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند ؛

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند ؛

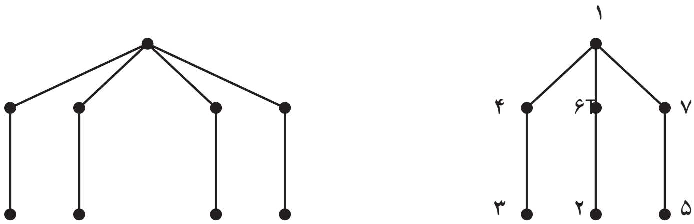
پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند ؛

۱۵ــ الف) اصل شمول و عدم شمول را در حالت چهار مجموعه بنویسید و آن را اثبات کنید.

ب) در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دوطرفه بین بعضی از روستاها ساخته شود به‌طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟

۱۶ــ برای درخت‌ها برچسب گذاری‌های مختلف تعریف می‌شود. یک **برچسب‌گذاری دلپذیر** برای یک درخت n رأسی عبارت است ازنسبت‌دادن اعداد $۱,۲,۳,...,n$ به رئوس آن، به‌طوری که برچسب یال‌ها $n-۱$ عدد متمایز باشند و برچسب هر یال از قدرمطلق تفاضل برچسب رأس‌های دو انتهای آن به‌دست آید. مثلاً در شکل ۶ (الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر را می‌بینیم.

یک برچسب‌گذاری دلپذیر برای درخت شکل ۶ (ب) پیدا کنید : **حدس** این است که «هر درخت یک برچسب‌گذاری دلپذیر دارد». ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



(ب) (الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر

شکل ۶

مراجع

۱ــ ایوان نیون، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم. ترجمه‌ی علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۸.

2 – R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 2nd. ed., Addison- Wesley 1989.[1]

۱ــ مرکز نشر دانشگاهی ترجمه‌ی فارسی این مرجع را منتشر خواهد کرد.

مجله‌ی ریاضی

مربع وفقی یکی از ساختارهای ترکیبیاتی است که ریاضی‌دانان شرق درباره‌ی آن کارهای بسیاری انجام داده‌اند و روش‌های ساخت این مربع‌ها برای اندازه‌های مختلف منسوب به این دانشمندان است. اصولاً ساختارهای ترکیبیاتی یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیات است که دارای کاربردهای فراوان نیز هستند. از مهم‌ترین ساختارهای ترکیبیاتی مربع‌های لاتین و طرح‌های بلوکی است. یک مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های $1, 2, 3, \ldots, n$ به‌طوری‌که در هر سطر و در هر ستون درایه‌های تکراری نباشند.

مربع‌های لاتین با مربع‌های وفقی نیز ارتباط دارند. یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است. به‌ازای هر n داده شده می‌توان یک مربع لاتین از مرتبه n ساخت. از مربع‌هایی که در زیر به‌ازای $n = 4$ و $n = 5$ ساخته شده‌اند

۵	۴	۳	۲	۱
۱	۵	۴	۳	۲
۲	۱	۵	۴	۳
۳	۲	۱	۵	۴
۴	۳	۲	۱	۵

۴	۳	۲	۱
۱	۴	۳	۲
۲	۱	۴	۳
۳	۲	۱	۴

می‌توان به‌راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

دقت کنید که در هر دو مربع فوق بعضی از درایه‌های واقع در دو گوشه‌ی چپ بالا و راست پایین را پررنگ نوشته‌ایم. در مربع اول ۴ تا و در مربع دوم ۶ تا از این درایه‌های پررنگ قرار دارند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع فقط این درایه‌ها را به ما بدهند می‌توانیم بقیه درایه‌ها را به‌طور یکتا به‌دست آوریم.

تعداد درایه‌های پررنگ داده شده در حالت کلی $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ است. حال فرض کنید درایه‌های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که می‌خواهید به یک شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می‌شود. الگوی فوق پیشنهاد می‌کند که فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می‌تواند بقیه را به‌طور یکتا پیدا کند.

قسمت چهارم

احتمال

مقدمه

امروزه همه‌ی سازمان‌های دولتی و خصوصی، در هر رسته‌ای که باشند، اعم از اقتصادی، صنعتی، اجتماعی و غیره برای تعیین سیاست و روند کار آینده‌ی خود ناگزیر به برنامه‌ریزی هستند. تصمیم‌گیری‌ها و آینده‌نگری‌ها علی‌رغم وجود اطلاعاتی از گذشته و داده‌هایی از حال، همواره دستخوش عدم قطعیت‌هایی هستند که نمی‌توان در رویارویی با آن‌ها با یقین کامل برنامه‌ریزی کرد. علم احتمال و بر پایه‌ی آن علم آمار با شاخه‌های متعددش، در مقابل لجام گسیختگی این عدم قطعیت‌ها و یا به اصطلاح عرف در مقابل شانس قد علم کرده‌اند و براساس قوانین محکم ریاضی، اثر شانس را کنترل می‌کنند. استنباط آماری که پایه‌ای برای تصمیم‌گیری است بر قوانین احتمال تکیه کرده است و در حال حاضر کوچک‌ترین گام پژوهشی در هر زمینه، مستلزم استفاده از این نوع استنباط‌هاست. کاربرد احتمال در کارهای نظامی، فیزیک، ارتباطات، نظریه‌ی اطلاعات، علوم فضایی، نظریه‌ی رمزنگاری و امثال آن‌ها به سرعت گسترش یافته است. با این وجود تصور می‌رود هنوز در اوایل راهی هستیم که سه سده‌ی پیش به صورتی مقدماتی آغاز شده است. ما با شما از ابتدای این راه همراه می‌شویم و با هم چند گامی مقدماتی از این راه را طی می‌کنیم و از آن جنبه‌ی احتمال که صورتی گسسته دارد سخن می‌گوییم. شاید که راهنمای شما برای ادامه راه باشد.

فصل ۸

احتمال

۸ــ۱ــ یادآوری

خلاصه‌ای از آن‌چه را سال گذشته درباره‌ی احتمال خوانده‌ایم در زیر می‌آوریم :

الف) می‌دانیم که اگر آزمایشی یا پدیده‌ای قبل از رخداد، نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشند آن را **آزمایش تصادفی** یا **پدیده‌ی تصادفی** می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن را **فضای نمونه‌ای** آزمایش تصادفی می‌نامیم. فضای نمونه‌ای را با S نشان می‌دهیم. هر نتیجه‌ی ممکن، یعنی هر عضو S را یک **برآمد** می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

مثال ۱: قرار است فردا تیم A در مقابل تیم B بازی کند. تیم A چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورد؟

به طور مطمئن نمی‌دانیم. اما نتیجه‌هایی که یکی از آن‌ها رخ می‌دهد عبارت‌اند از :

برابر شدن دو تیم $= c$ باختن تیم $A = b$ بردن تیم $A = a$

پس مجموعه‌ی $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه‌ای است و هر عضو این مجموعه برآمدی است که ممکن است رخ دهد. از سه برآمد تنها یکی رخ می‌دهد. Δ

ب) هر پیشامد، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. مثلاً $E_1 = \{a, b\}$ یک پیشامد است و به معنای آن است که در بازی فردا «تیم A یا می‌برد و یا می‌بازد». در هر حال وقتی می‌گوییم پیشامد E_1 رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. اگر $E_2 = \{a, c\}$ رخ بدهد بدان معناست که تیم A فردا یا می‌برد و یا برابر می‌کند. دو پیشامد را که

برآمد مشترکی ندارند **ناسازگار** می‌گویند. سال گذشته اعمال روی پیشامدها را که همان اعمال روی مجموعه‌ها هستند دیده‌اید.

تذکر: منظور از «رخداد» یک پیشامد وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهده‌ی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش است.

پ) اگر فضای نمونه‌ای به جای ۳ برآمد ممکن، n برآمد ممکن داشته باشد تعداد پیشامدها، یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن 2^n است. در مثالا بالا $2^3 = 8$ پیشامد در فضای نمونه‌ای حاصل می‌شوند که عبارت‌اند از :

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\phi$$

ϕ **پیشامد ناممکن** است. پیشامد $S=\{a,b,c\}$ حتماً رخ می‌دهد زیرا به معنای آن است که یکی از سه برآمد a، b و c رخ می‌دهد و این مسلم است که فردا، در صورت انجام بازی، تیم A یا می‌برد، یا می‌بازد و یا برابر می‌کند. پس S رخ می‌دهد. لذا S را **پیشامد مطمئن** می‌گوییم. تعداد اعضای مجموعه‌ی S، یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است **متناهی** یا **شمارا نامتناهی** یا **ناشمارا نامتناهی** باشد. اگر لامپی را از فرایند تولید لامپ انتخاب کنیم و بخواهیم سالم بودن آن را امتحان کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی دو برآمد دارد، لذا S مجموعه‌ای متناهی است. اگر هدف این باشد که سکه‌ای را آن‌قدر بیندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، بی‌نهایت برآمد دارد که می‌توان این برآمدها را با اعداد طبیعی متناظر کرد. وقتی تعداد برآمدهای فضایی نمونه‌ای متناهی یا شمارا نامتناهی باشد آن را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌گوییم. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا نامتناهی باشد که در این صورت فضای نمونه‌ای گسسته نیست، مثل انتخاب تصادفی نقطه در بازه‌ی $(0,1)$.

ت) وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم، که این تابع براساس **۳ اصل موضوع** زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد،

اصل موضوع ۱: احتمال هر پیشامد، عددی نامنفی است، یعنی برای هر پیشامد A از S،

$$P(A)\geq 0$$

اصل موضوع ۲:

$$P(S)=1$$

اصل موضوع ۳ : اگر A_1 ، A_2 ، ... ، A_n دنباله‌ای متناهی[1] از پیشامدهای دو به دو ناسازگار S باشند آن‌گاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

این اصول موضوع منسوب به کولموگوروف هستند. هر تابع حقیقی مقدار که در این اصول صادق باشد به تابع احتمال موسوم است. فضای S و تابع P و مجموعه‌ی پیشامدها را مدل احتمال آزمایش تصادفی می‌نامند. تعریف دقیق‌تری از مدل احتمال را در مقاطع بالاتر تحصیلی می‌بینید. دیده‌اید که اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته S باشد، $P(A)$ برابر با مجموع احتمال‌های برآمدهایی است که در A هستند. به خصوص اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد می‌توانید برقراری ۳ اصل بالا را به سهولت تحقیق کنید. همان‌طور که می‌دانید چنین فضای نمونه‌ای را یکنواخت یا متساوی‌الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد آن‌گاه $P(A) = \frac{m}{n}$ است که با مفهوم فراوانی نسبی در آمار مطابقت دارد.

وقتی مثلاً پیشامد $A = \{a, b, c\}$ را داریم که a، b و c برآمدها هستند احتمال این پیشامد را چنین می‌نویسیم

$$P(A) = P(\{a, b, c\})$$

در مواردی که پیشامد، تک عضوی مانند $\{a\}$ باشد برای سادگی احتمال آن را به جای $P(\{a\})$ به صورت $P(a)$ می‌نویسیم.

وقتی فضای نمونه‌ای گسسته است در تخصیص اندازه‌ی احتمال، لازم نیست که احتمال هر زیر مجموعه ممکن را مشخص کنیم، و این امتیاز بزرگی است، زیرا مثلاً اگر فضای نمونه‌ای ۲۰ برآمد داشته باشد تعداد پیشامدهای S یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن $2^{20} = 1048576$ است. در این حالت اگر اندازه‌ی احتمال منسوب به رخداد هر برآمد معلوم باشد مدل احتمال مشخص می‌شود.

دیده‌اید که روی یک فضای نمونه‌ای می‌توان تابع‌های P ی مختلف تعریف کرد.

مثال۲: به مثال ۱ رجوع کنید. فرض کنید در گذشته تیم A مثلاً ۲۰ بار با تیم B مسابقه داده است و شرایط زمانی و مکانی و تیمی همه بازی‌ها یکی بوده‌اند، و جمعاً ۱۰ بار تیم A برنده، ۶ بار بازنده شده و ۴ بار برابر کرده باشد. پس $\frac{10}{20}$ بارها برنده، $\frac{6}{20}$ بارها بازنده شده و $\frac{4}{20}$ بارها برابر کرده

۱ــ در واقع اگر دنباله‌ی پیشامدها نامتناهی نیز باشد، اصل موضوع ۳ استوار است.

است. در این صورت معقول است که بگوییم فردا تیم A با احتمال $\frac{۵}{۱۰}$ برنده، با احتمال $\frac{۳}{۱۰}$ بازنده خواهد شد و با احتمال $\frac{۲}{۱۰}$ برابر خواهد کرد. پس با توجه به فراوانی نتیجه‌های بازی‌های گذشته تابع P را به صورتی تعریف می‌کنیم که به برآمدهای فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c\}$ احتمال‌های زیر را تخصیص دهد

$$P(a)=\frac{۵}{۱۰} \qquad P(b)=\frac{۳}{۱۰} \qquad P(c)=\frac{۲}{۱۰}$$

می‌توانیم از روی اطلاعات دیگر، مثلاً ملاحظه مسابقات تمرین چند روز قبل دو تیم، احتمال‌های دیگری را به برآمدها نسبت دهیم. با معلوم بودن S و P می‌توانیم احتمال هر پیشامد S را مشخص کنیم، مثلاً

$$P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=\frac{۷}{۱۰}$$

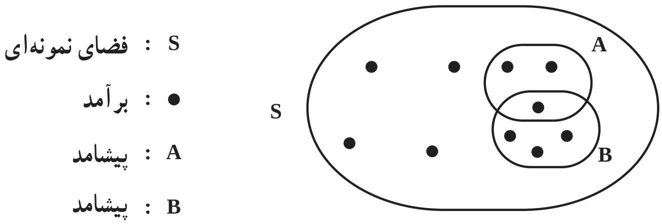
یعنی احتمال این‌که تیم A برنده شود یا برابر کند $\frac{۷}{۱۰}$ است. Δ

وقتی فضای نمونه‌ای ناشمارا نامتناهی باشد تخصیص احتمال به همه برآمدها عملی نیست. در بیشتر این حالت‌ها احتمالی که به هر یک از برآمدها نسبت می‌دهند باید برابر صفر باشد و تعیین احتمال پیشامدهایی که احتمال آن‌ها صفر نیست از روی برآمدها مشکل خواهد شد. برای ساختن مدل احتمال در این حالت‌ها احتمال‌ها را به پیشامدها نسبت می‌دهیم. همان‌طور که سال قبل دیده‌ایم این فضای نمونه‌ای می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثل بازه‌ی $(۰,۱)$ یا تمام خط حقیقی یا مجموعه‌ای از نقاط واقع در فضای سه بعدی مانند نقاط داخل یک مکعب و نظایر این‌ها باشد. در این صورت تابع P، همان‌طور که می‌دانیم، به هر پیشامد که متناظر با مثلاً فاصله‌ای روی خط حقیقی یا ناحیه‌ای روی دایره یا ناحیه‌ای درون مکعب و امثال آن است عددی را به عنوان احتمال نسبت می‌دهد. ما در این کتاب تنها از فضاهای نمونه‌ای گسسته صحبت می‌کنیم.

ث) همان‌طور که در (ب) گفتیم اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند وقتی که برآمدی مشترک نداشته باشند آن‌ها را **ناسازگار** می‌گویند. اگر A و B برآمدهایی مشترک داشته باشند، یعنی $A\cap B$ تهی نباشد آن‌گاه $A\cap B$ که خود زیر مجموعه‌ی S است، یک پیشامد است و وقتی رخ می‌دهد که برآمدی از آن، که ناچار هم عضو A و هم عضو B است، رخ دهد. اگر پیشامد $A\cup B$ را

در نظر بگیریم وقتی این پیشامد رخ می‌دهد که حدّاقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. واضح است این برآمد که متعلق به A و یا متعلق به B است می‌تواند متعلق به اشتراک A و B هم باشد. در سال قبل دیده‌ایم که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



شکل ۱ــ نمایش فضای نمونه‌ای، برآمد و پیشامد

فرمول بالا به شما اجازه می‌دهد که وقتی از روی مدل احتمال، احتمال رخداد پیشامد A، احتمال رخداد پیشامد B و احتمال رخداد پیشامد $A \cap B$ را دارید احتمال رخداد پیشامد $A \cup B$ را به‌دست آورید. برابری‌های زیر را نیز یادآوری می‌کنیم.

اگر پیشامد $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد آن‌گاه

$$P(\overline{A}) = ۱ - P(A)$$

که بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$P(\phi) = ۱ - P(S) = ۰$$

هم‌چنین اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

و

$$P(A) \le P(B)$$

اینک پس از این یادآوری‌ها به بیان مطالبی جدید در زمینه‌ی احتمال می‌پردازیم.

۸ــ۲ــ مدل احتمال شرطی

فرض کنید می‌خواهیم آزمایشی تصادفی را انجام دهیم. ابتدا فضای نمونه‌ای را مشخص

می‌کنیم و احتمالی به رخداد هر پیشامد نسبت می‌دهیم و بدین ترتیب مدل احتمال را معین می‌کنیم. این مدل را می‌شناسید. حال اگر اطلاعی اضافی درباره‌ی فضای نمونه‌ای داشته باشیم، مثلاً به دلیلی بدانیم که پیشامد B از این فضای نمونه‌ای رخ داده است آن‌گاه معمولاً مدل احتمال قبلی به هم می‌ریزد و آگاهی از رخداد حتمی پیشامد B در مقدار احتمال سایر پیشامدها اثر می‌گذارد، که در این صورت احتمال‌های پیشامدهای فضای نمونه‌ای با احتمال‌های مدل قبلی تفاوت دارند. اگر بتوانیم تحت این شرط که پیشامد B حتماً رخ می‌دهد احتمال پیشامدهای دیگر فضای نمونه‌ای را مشخص کنیم مدل احتمال جدیدی به‌دست می‌آید که آن را مدل **احتمال شرطی** می‌نامیم. قبل از توضیح بیشتر مثالی می‌زنیم.

مثال ۳: می‌خواهید یک تاس قرمز و یک تاس سفید را با هم بریزید. تاس‌ها همگن‌اند. می‌دانید که فضای نمونه‌ای ۳۶ برآمد دارد :

S = {(۱قرمز و ۱ سفید), ... ,(۱قرمز,۶ سفید) ...,(۶قرمز,۱سفید), ... ,(۶قرمز,۶ سفید)}

پس از انجام آزمایش، یکی از این ۳۶ برآمد رخ خواهد داد. احتمال رخداد هر برآمد $\frac{۱}{۳۶}$ است. حال فرض کنید این اطلاع اضافی را داریم که پس از انجام آزمایش مجموع شماره‌های دو تاس حتماً کوچک‌تر از ۷ است. پیشامد «مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷» را B می‌نامیم. پیشامد B از برآمدهای زیر تشکیل می‌شود :

(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵)

(۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۴)

(۳,۱), (۳,۲), (۳,۳)

(۴,۱), (۴,۲)

(۵,۱)

یعنی پیشامد B، متشکل از ۱۵ برآمد از ۳۶ برآمد فضای نمونه‌ای است. وقتی شرط می‌کنیم که B حتماً رخ می‌دهد، یعنی یکی از این ۱۵ برآمد نتیجه‌ی ریختن دو تاس است.

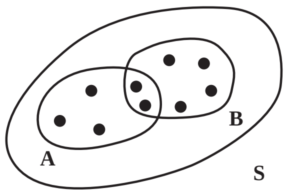
برآمدهایی مثل (۱,۶) یا (۲,۵) یا (۴,۵) و غیره که مجموع دو شماره‌ی آن‌ها ۷ یا بیش از ۷ است رخ نخواهند داد. حال که می‌دانیم پیشامد B به طور مطمئن رخ می‌دهد آن را فضای نمونه‌ای جدید فرض می‌کنیم و بدین ترتیب مدل احتمال جدیدی داریم که آن را مدل احتمال شرطی با شرط

«مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷ است» می‌نامیم. حال اگر بخواهیم به شرط رخداد پیشامد B، احتمال رخداد یک جفت را بدانیم و پیشامد داشتن جفت را با A نشان دهیم در این صورت احتمال پیشامد داشتن جفت به شرط رخداد پیشامد B را با $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم احتمال **پیشامد A** به **شرط رخداد پیشامد B** و یا به صورتی ساده احتمال **پیشامد A به شرط B**. وقتی می‌دانیم B رخ داده، تنها ممکن است یکی از ۱۵ برآمد بالا رخ دهد. بین این برآمدها جفت‌های ممکن (۱,۱) ، (۲,۲) و (۳,۳) هستند. چون احتمال رخداد هر برآمد مساوی $\frac{۱}{۱۵}$ است، لذا

$$P(A|B) = P\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} = \frac{۳}{۵}$$

Δ

در مثال بالا، احتمال شرطی، یعنی $P(A|B)$ را به سادگی حساب کردیم زیرا فضای نمونه‌ای آزمایش یکنواخت، یا برآمدها متساوی‌الاحتمال یعنی هم‌شانس بودند، ولی اگر احتمال برآمدها یکی نباشند کار کمی مشکل است. قبل از این‌که تعریف کلی احتمال شرطی را مطرح کنیم، به این مطلب به صورتی شهودی می‌اندیشیم. به شکل ۲ توجه کنید.



شکل ۲

S فضای نمونه‌ای آزمایش است. B پیشامدی است که می‌دانیم رخ خواهد داد. A پیشامدی است که می‌خواهیم به شرط آن‌که B رخ دهد، احتمال رخدادش را بیابیم. وقتی B رخ می‌دهد که یکی از برآمدهایش رخ دهد. اگر برآمدی که رخ می‌دهد در $A\cap B$ باشد طبیعتاً A هم رخ می‌دهد. پس هر چه احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ بیشتر باشد احتمال رخداد پیشامد A به شرط B بیشتر است. لذا به طور شهودی $P(A|B)$ باید در رابطه‌ی مستقیم با $P(A\cap B)$ باشد. این رابطه را به صورت،

$$(۱) \quad P(A|B) = KP(A\cap B)$$

فرض می‌کنیم. در این برابری اگر به جای پیشامد A پیشامد B قرار بگیرد نتیجه می‌شود

$$P(B|B) = KP(B\cap B)$$

اما احتمال رخداد پیشامد B به شرط B برابر ۱ است زیرا B حتماً رخ می‌دهد و $B \cap B = B$ ،
پس برابری بالا به صورت

$$۱ = K.P(B)$$

در می‌آید و داریم $K = \frac{۱}{P(B)}$. اگر این مقدار را در (۱) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

این رابطه را به طور شهودی به‌دست آوردیم. براساس همین رابطه‌ی شهودی تعریف زیر را برای احتمال شرطی ارائه می‌دهیم.

تعریف احتمال شرطی: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند وقتی $P(B) \neq ۰$ ، احتمال پیشامد A به شرط این‌که پیشامد B رخ دهد به صورت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (۲)$$

تعریف می‌شود. وقتی $P(B) = ۰$ ، احتمال شرطی قابل تعریف نیست.

در مقاطع بالاتر خواهید دید که احتمال شرطی روی یک فضای نمونه‌ای تابع احتمالی است که در سه اصل موضوع کولموگوروف صدق می‌کند.

مثال ۴: سازنده‌ی قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه‌های گذشته می‌داند احتمال این‌که سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال این‌که سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع تحویل مشتری شود برابر ۰/۸ است. احتمال این‌که سفارشی به موقع تحویل شود به شرط آن‌که به موقع ارسال شده باشد چه‌قدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

$A =$ پیشامد آماده بودن به موقع، برای ارسال

$B =$ پیشامد تحویل به موقع سفارش، به مشتری

بنابر داده‌های مسأله، $P(A) = ۰/۹$ و $P(A \cap B) = ۰/۸$

زیرا پیشامد $A \cap B$ به معنای این است که سفارش هم به موقع آماده برای ارسال بوده و هم به موقع تحویل مشتری می‌شود. آن‌چه می‌خواهیم، $P(B|A)$ است، یعنی احتمال تحویل به موقع سفارش به مشتری به شرط آن‌که به موقع ارسال شده باشد. بنابر تعریف احتمال شرطی

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۸}{۰/۹}=\frac{۸}{۹}$$

Δ

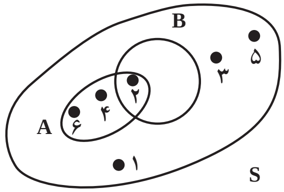
مثال ۵: تاسی همگن را با چشم بسته انداخته‌ایم. برآمد حاصل را نگفته‌اند، ولی اعلام کرده‌اند که برآمد حاصل عددی زوج است. احتمال این‌که شماره‌ی ۲ ظاهر شده باشد چه قدر است؟

قرار می‌دهیم:

پیشامد ظاهر شدن شماره‌ی زوج $= A$

پیشامد ظاهرشدن شماره‌ی ۲ $= B$

به شکل ۳ توجه کنید.



شکل ۳

لذا
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

زیرا $P(A)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$. به عبارت دیگر می‌توانید تصور کنید که فضای نمونه‌ای $\{۲,۴,۶\}$ است که حتماً رخ داده است و لذا روی این فضا، رخ دادن ۲ دارای یک شانس از ۳ شانس است یعنی احتمال رخداد برآمد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

Δ

۸ــ۳ــ قاعده‌ی ضرب احتمال

از تعریف

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad P(B)\neq ۰$$

نتیجه می‌شود که

$$P(A\cap B)=P(B).P(A|B),\qquad P(B)\neq ۰$$

این رابطه به **قاعده‌ی ضرب احتمال** موسوم است. به کمک این قاعده می‌توان احتمال رخداد هم‌زمان دو پیشامد را تعیین کرد.

مثال ۶: جعبه‌ای محتوی ۱۲ لامپ است که می‌دانیم ۳ تای آن‌ها معیوب‌اند. از این جعبه به تصادف ۱ لامپ برمی‌داریم. سپس مجدداً بدون جای‌گذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف برمی‌داریم. احتمال این‌که هر دو لامپ معیوب باشند چه‌قدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

$A =$ پیشامد معیوب بودن لامپ اول

$B =$ پیشامد معیوب بودن لامپ دوم

بنابراین $A \cap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است. واضح است که :

$$P(A) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آن‌ها معیوب است برمی‌داریم پس :

$$P(B|A) = \frac{۲}{۱۱}$$

لذا از قاعده‌ی ضرب احتمال داریم :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{۱}{۴} \cdot \frac{۲}{۱۱} = \frac{۱}{۲۲}$$

Δ

۸ـ۴ـ استقلال دو پیشامد

پیشامدهای A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند که احتمال آن‌ها مثبت است. اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در احتمال رخداد پیشامد A مؤثر نباشد A را **مستقل** از B می‌گویند. پس برای مستقل بودن A از B باید

$$P(A|B) = P(A)$$

ولی می‌دانیم که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

از مقایسه‌ی دو برابری داریم :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

یا

$$(۳) \quad P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

به سادگی می‌توان دید که اگر B از A مستقل باشد باز همین رابطه برقرار است. پس اگر A از B مستقل باشد یا B از A مستقل باشد باید رابطه‌ی (۳) برقرار باشد. از طرفی با داشتن رابطه‌ی (۳) می‌توان به رابطه‌های $P(B|A) = P(B)$ و $P(A|B) = P(A)$ رسید. (چرا؟) یعنی رابطه‌ی (۳) شرط لازم و کافی برای استقلال A از B و B از A است. بر این اساس می‌گوییم A و B مستقل‌اند. پس :

تعریف: دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

اگر $P(A\cap B) \neq P(A).P(B)$ می‌گویند **دو پیشامد وابسته**‌اند.

مثال ۷: فرض کنید برای ریاست شرکتی ۴ داوطلب وجود دارند. احتمال انتخاب‌شدن همه‌ی داوطلب‌ها یکی است. برآمدهای انتخاب افراد را به ترتیب با ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش می‌دهیم. نشان دهید که پیشامدهای $A = \{۱, ۴\}$ و $B = \{۱, ۳\}$ از هم مستقل‌اند.

فضای نمونه‌ای به صورت $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. بنابر داده‌های مثال،

$$P(۱) = P(۲) = P(۳) = P(۴) = \frac{۱}{۴}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که پیشامد A یعنی انتخاب فرد اول یا چهارم، از پیشامد B یعنی از انتخاب فرد اول یا سوم مستقل است. واضح است که

$$A\cap B = \{۱, ۴\} \cap \{۱, ۳\} = \{۱\}$$

پس :

$$P(A\cap B) = P(۱) = \frac{۱}{۴}$$

از طرفی :

$$P(A) = P(B) = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه :

$$P(A\cap B) = P(A).P(B) = \frac{۱}{۴}$$

یعنی پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند.

توجه: اگر دو پیشامد یک فضای نمونه‌ای ناسازگار باشند یعنی برآمدی مشترک نداشته باشند و احتمال هر دو مثبت باشد آن دو پیشامد از هم مستقل نیستند. به عبارت دیگر ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد. زیرا اگر $A \cap B = \phi$ ، آن‌گاه

$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

و اگر A و B مستقل باشند باید

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

از مقایسه‌ی دو برابری اخیر نتیجه می‌شود که

$$P(A).P(B) = 0$$

یعنی دو پیشامد ناسازگار وقتی مستقل‌اند که $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$ ، و اگر این دو احتمال صفر نباشند A و B مستقل نیستند.

۸ ــ۵ــ فرمول احتمال کل

اگر فضای نمونه‌ای S به n پیشامد B_1 ، B_2 ، ... ، B_n افراز شده باشد و اگر A پیشامدی از S باشد آن‌گاه به شرط $P(B_i) \neq 0$ ، $i = 1, \dots, n$ ،

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i) \qquad (۴)$$

زیرا همان‌طور که در سال پیش دیده‌ایم

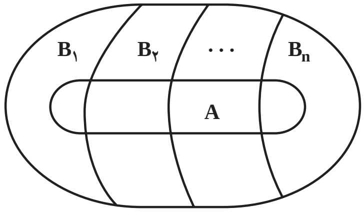
$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$

و هر دو پیشامد B_i و B_j وقتی $i \neq j$ ، ناسازگارند، یعنی $B_i \cap B_j = \phi$ ، $i \neq j$ ، بدیهی است که

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

اما همه پیشامدهای طرف دوم رابطه بالا دو به دو ناسازگارند، پس، طبق اصل موضوع ۳، داریم :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$



شکل ۴ــ افراز فضای نمونه‌ای

یا به صورت خلاصه، $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)$. اما می‌دانیم که با توجه به تعریف احتمال شرطی و با فرض $P(B_i)\neq 0$ ، $P(A\cap B_i)=P(B_i)P(A|B_i)$ ، پس نتیجه می‌شود که $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$. این فرمول به فرمول **احتمال کل** موسوم است.

مثال ۸: سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهره‌ی سفید و ۱۱ مهره‌ی سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه است، و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید است. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای در می‌آوریم. احتمال این‌که مهره سفید باشد چه قدر است؟

پیشامد استخراج مهره‌ی سفید را با A نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$ را حساب کنیم پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

$B_1=\{$ظرف اول انتخاب شود$\}$

$B_2=\{$ظرف دوم انتخاب شود$\}$

$B_3=\{$ظرف سوم انتخاب شود$\}$

بدیهی است $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$. از طرفی

$$P(A|B_1)=\frac{5}{16}\ ,\ \ P(A|B_2)=\frac{1}{4}\ ,\ \ P(A|B_3)=1$$

حال با توجه به فرمول احتمال کل

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{25}{48}$$

Δ

۸ ــ ۶ــ قاعده‌ی بیز

(حالت ساده). در آزمایش‌های معمولی مواردی وجود دارند که برآمد نهایی آزمایش به آن‌چه در مراحل قبلی رخ می‌دهند بستگی دارد. برای توضیح این مطلب ابتدا به معرفی قاعده‌ی بیز می‌پردازیم.

دیدیم که اگر A و B دو پیشامد با احتمال مثبت از فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشند، آنگاه داریم

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

و

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

اگر از برابری دوم $P(A\cap B)$ یعنی $P(B|A).P(A)$ را در برابری اول قرار دهیم، نتیجه می‌شود که

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}.P(B|A) \qquad (۵)$$

این رابطه را **قاعده‌ی بیز** می‌نامند. قاعده‌ی بیز در حالت کلی مفصل‌تر است. تامس‌بیز (۱۷۶۱ــ ۱۷۰۲) کشیشی انگلیسی بود که حالت کلی‌تر این قاعده را ارائه داد. در مثال زیر یک مورد استفاده از قاعده بیز را می‌بینید.

مثال ۹: وقتی یک مرکز مخابره‌ی تلگراف، پیامی را به مرکز دیگر می‌فرستد گاهی خطاهایی در انتقال صورت می‌گیرند. به ویژه وقتی از الفبای مورس برای مخابره استفاده می‌شود و کدهای «نقطه» و «خط» را به کار می‌برند[1] این خطاها بدین صورت است که کدی که مرکز M به صورت نقطه می‌فرستند در مرکز N خط دریافت می‌شود و یا برعکس. به تجربه دریافته‌اند که به طور متوسط در هر متنی که مرکزی می‌فرستد نسبت فراوانی نقطه به فراوانی خط برابر ۳ به ۴ است. هم‌چنین به طور تقریب می‌دانند که با احتمال $\frac{۱}{۸}$ نقطه‌ای که مرکز M می‌فرستد در مرکز N در اثر تداخل خطوط مخابره، اشتباهاً خط دریافت می‌شود و با همین احتمال خطی را که مرکز M می‌فرستد در مرکز N نقطه دریافت می‌شود. حال اگر در مرکز N کدی به صورت نقطه دریافت شده باشد چه قدر احتمال

۱ــ این روزها، در ارتباط‌های الکترونیکی از کدهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنند.

دارد که این کد واقعاً به صورت نقطه فرستاده شده باشد؟

اگر در فرمول بیز قرار دهیم

$A =$ پیشامد فرستادن نقطه

$B =$ پیشامد دریافت نقطه

آن‌گاه فرمول

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}.P(B|A)$$

به صورت زیر درمی‌آید

(الف) P(فرستادن نقطه|دریافت نقطه) $= \dfrac{P\text{(فرستادن نقطه)}}{P\text{(دریافت نقطه)}}.P$(دریافت نقطه|فرستادن نقطه)

آنچه می‌خواهیم به‌دست آوریم طرف اول رابطه است. زیرا در مرکز N نقطه‌ای دریافت شده است و می‌خواهیم احتمال این‌که این کد به صورت نقطه فرستاده شده باشد را بدانیم. پس سه احتمال طرف دوم را حساب می‌کنیم.

(ب) $P(A) = P\text{(فرستادن نقطه)} = \frac{۳}{۷}$

(پ) $P(B|A) = P\text{(دریافت نقطه | فرستادن نقطه)} = \frac{۷}{۸}$

محاسبه‌ی سومین احتمال یعنی P(دریافت نقطه) کمی مفصل‌تر است. وقتی نقطه‌ای دریافت می‌شود باید فکر کنیم که نقطه‌ای فرستاده‌اند و یا خطی فرستاده‌اند که به خطا نقطه دریافت شده است. پس

(ت) $P(B) = P\text{(دریافت نقطه)} = P\text{(فرستادن نقطه} \cap \text{دریافت نقطه)} + P\text{(فرستادن خط} \cap \text{دریافت نقطه)}$

اما از فرمول حاصل‌ضرب احتمال می‌توانیم دو جمله‌ی طرف دوم را حساب کنیم.

$P\text{(دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن نقطه)} = P\text{(دریافت نقطه | فرستادن نقطه)}.P\text{(فرستادن نقطه)}$

$$= \frac{۷}{۸}.\frac{۳}{۷} = \frac{۳}{۸}$$

$P\text{(دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط)} = P\text{(دریافت نقطه | فرستادن خط)}.P\text{(فرستادن خط)}$

می‌دانیم که طبق داده‌های مثال، $P\text{(فرستادن خط)} = \frac{۴}{۷}$ و $P\text{(دریافت نقطه | فرستادن خط)} = \frac{۱}{۸}$.

پس :

$$P\,(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط}) = \frac{۱}{۸}\cdot\frac{۴}{۷} = \frac{۱}{۱۴}$$

اگر مقادیر این دو جمله را در (ت) قرار دهیم

$$P(B) = P(\text{دریافت نقطه}) = \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۱۴} = \frac{۲۵}{۵۶} \qquad \text{(ث)}$$

حال اگر (ب)، (پ) و (ث) را در (الف) قرار دهیم جواب مسأله به دست می‌آید :

$$P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن نقطه}) = \frac{\frac{۳}{۷}}{\frac{۲۵}{۵۶}}\cdot\frac{۷}{۸} = \frac{۲۱}{۲۵}$$

پس اگر در مرکز N نقطه‌ای دریافت شود احتمال $\frac{۲۱}{۲۵}$ وجود دارد که این کد واقعاً به صورت نقطه فرستاده شده باشد. Δ

همان‌طور که در مثال فوق توجه کردید در قاعده‌ی بیز ابتدا از روی تجربه‌های گذشته و یا فراوانی‌ها احتمالی ذهنی به رخداد پیشامد B به شرط A نسبت می‌دهیم. سپس با قاعده‌ی بیز احتمال رخداد پیشامد A به شرط B را محاسبه می‌کنیم. در مثال بالا

$$P\,(\text{فرستادن نقطه} \mid \text{دریافت نقطه})$$

را از روی تجربه‌ی گذشته برابر $\frac{۷}{۸}$ تعیین کردیم، سپس به کمک این داده و سایر داده‌ها $P(\text{دریافت‌نقطه} \mid \text{فرستادن نقطه})$ را که موردنظر بود به‌دست آوردیم.

۸ ــ۷ــ تمرین‌ها

۱ــ جعبه‌ای محتوی ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جای‌گذاری برمی‌داریم.

الف) اگر اولین مهره سیاه باشد احتمال این‌که دومین مهره هم سیاه باشد چه‌قدر است؟

ب) احتمال این‌که مهره‌ی دوم هم‌رنگ مهره‌ی اول باشد چه‌قدر است؟

۲ــ برحسب تجربه‌ی گذشته می‌دانیم احتمال این‌که رتبه‌ی اول سال آخر رشته‌ی ریاضی دبیرستانی در مسابقه‌ی ورودی دانشگاه قبول شود ۰/۹۵ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در

این دبیرستان، احتمال این‌که او در سال آخر رشته‌ی ریاضی دبیرستان رتبه‌ی اول شود ۰/۹ است. احتمال این که علی هم رتبه‌ی اول شود و هم در مسابقه‌ی ورودی دانشگاه قبول شود چه‌قدر است؟

۳ــ سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ‌دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ‌دادن پشت در پرتاب سوم و C پیشامد رخ‌دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل‌اند ولی B و C مستقل نیستند.

۴ــ احتمال زنده‌ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۰/۵ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد احتمال این‌که بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چه قدر است؟

۵ــ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳تای آن‌ها معیوب‌اند. اگر به تصادف ۳ لامپ متوالیاً بدون جای‌گذاری از جعبه برداریم احتمال این‌که هر ۳ لامپ معیوب باشند چقدر است؟

۶ــ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a، b، c، d و e است. به شرط آن‌که $P(\{a,b,c\})=\frac{۱}{۲}$ ، $P(a)=\frac{۱}{۴}$ مطلوب است :

الف) محاسبه‌ی $P(\{b,c,d\}|\{a,b,c\})$

ب) محاسبه‌ی $P(\{a\}|\{a,b,c\})$

۷ــ ۴ مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را در ظرفی ریخته‌ایم. اگر بخواهیم دو مهره به تصادف از ظرف بیرون بیاوریم شش امکان (۱, ۲)، (۱, ۳)، (۱, ۴)، (۲, ۳)، (۲, ۴) و (۳, ۴) وجود دارند. تفاضل هر دو شماره را R و مجموع آن‌ها را S فرض می‌کنیم.

الف) احتمال پیشامدی را که برای آن $R=۲$ ، به‌دست آورید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن $S=۵$ ، به‌دست آورید.

آیا این پیشامدها مستقل‌اند؟

پ) اگر در قسمت الف R برابر یک باشد و در قسمت ب S هم‌چنان ۵ باشد پیشامدها مستقل‌اند؟

۸ــ در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبه‌ی اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبه‌ی دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم. احتمال این‌که این لامپ معیوب باشد چه‌قدر است؟

۹ــ دو ظرف داریم. اولی شامل ۱۰ مهره سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است و دومی شامل ۱۲ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه است. از ظرف اول به تصادف مهره‌ای در می‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم. احتمال این‌که این مهره سفید باشد چه قدر است؟

۱۰ــ تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال این‌که اعتصابی رخ دهد ۰/۶۵ باشد و احتمال این‌که اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸ و احتمال این‌که اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۰/۳ باشد. احتمال این‌که کار بنای راه به موقع انجام شود چه قدر است؟

۱۱ــ اگر $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳) \le P(A_۱) + P(A_۲) + P(A_۳)$$

۱۲ــ اگر $B_۱$ ، $B_۲$ و $B_۳$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S و با احتمال مثبت باشند، $P(B_۳|B_۲ \cap B_۱)$ به معنای احتمال رخداد پیشامد $B_۳$ به شرط رخداد هر دو پیشامد $B_۱$ و $B_۲$ است. با این تعریف ثابت کنید

$$P(B_۱ \cap B_۲ \cap B_۳) = P(B_۱)P(B_۲|B_۱)P(B_۳|B_۲ \cap B_۱)$$

۱۳ــ اگر $B_۱$ ، $B_۲$ و $B_۳$ سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتماع آن‌ها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید.

$$P(B_۱|A) = \frac{P(A|B_۱)P(B_۱)}{\sum_{i=۱}^{۳} P(A|B_i)P(B_i)} \ , \ i = ۱,۲,۳$$

فصل ۹

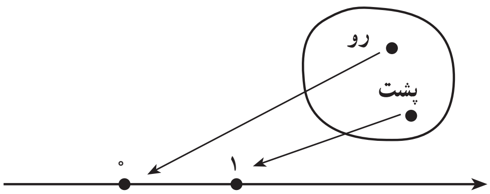
توزیع های گسسته‌ی احتمال

۹ـ۱ـ متغیر تصادفی گسسته

به‌طوری که قبلاً گفتیم در هر آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و به رخداد هر پیشامد آن عددی بین ۰ و ۱ به عنوان احتمال نسبت می‌دهیم. حال می‌خواهیم مجموعه‌ی دیگری را به‌جای فضای نمونه‌ای قرار دهیم. ابتدا به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: وقتی سکه‌ای را می‌اندازیم، S دارای دو برآمد رو و پشت است. تابع X را بدین صورت تعریف می‌کنیم که حوزه‌ی تعریف (دامنه) آن مجموعه‌ی S با دو عضو رو و پشت و حوزه‌ی مقادیر (برد) آن دو عدد ۰ و ۱ از محور اعداد حقیقی باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} X(\text{رو}) = 0 \\ X(\text{پشت}) = 1 \end{cases}$$



شکل ۱

چنین تابع X را متغیر تصادفی می‌گوییم که دو مقدار ۰ و ۱را اختیار می‌کند. چون احتمال رخداد برآمد رو $\frac{1}{2}$ است پس $X=0$ که نمایش ساده‌ی $X(\text{رو}) = 0$ است و در واقع نمادی برای رخداد برآمد رو است، دارای همان احتمال $\frac{1}{2}$ و همین‌طور احتمال $X=1$ برابر $\frac{1}{2}$ است. در واقع به‌جای جدول

برآمد	رو	پشت
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

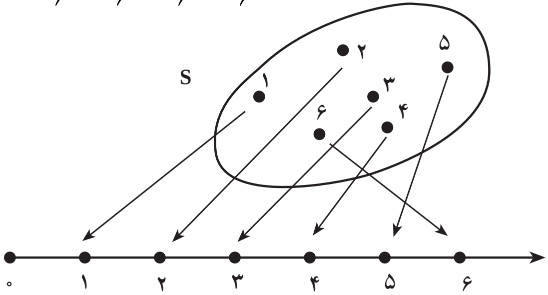
جدول

x_i	۰	۱
p_i	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

را قرار می‌دهیم. x_i ها مقادیر X و p_i ها احتمال‌های متناظر با آن‌ها هستند. توجه کردید که فضای نمونه‌ای، $S=\{$ پشت، رو $\}$، جای خود را به مجموعه‌ی $\{۰,۱\}$ داده است. Δ

مثال ۲: در انداختن یک تاس همگن مجموعه‌ی S دارای ۶ برآمد است. به هر برآمد S، احتمال $\frac{۱}{۶}$ را نسبت می‌دهیم. اگر X تابعی باشد که بر هر برآمد S عددی صحیح از ۱ تا ۶ را که همان اعداد حک شده بر وجوه تاس‌اند نسبت دهد، یعنی بر هر برآمد S نقطه‌ای از محور اعداد حقیقی را نسبت دهیم، متغیر تصادفی X با مقادیر صحیح ۱ تا ۶ به‌وجود می‌آید که احتمال هر مقدار آن، همان احتمال برآمد S متناظر با آن است (شکل ۲). پس جدول زیر برای ریزش تاس نتیجه می‌شود.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$



شکل ۲

Δ

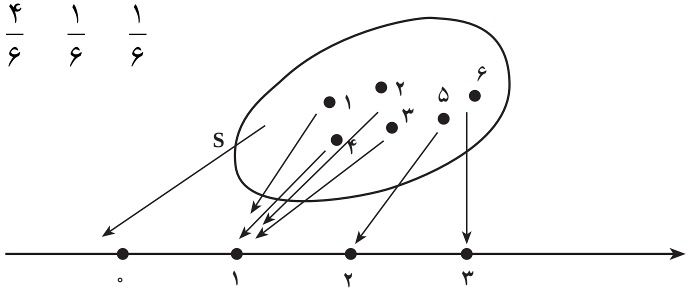
مثال ۳: بر فضای نمونه‌ای S، در مثال قبل، می‌توان متغیر تصادفی دیگری را تعریف کرد. تابع X را تابعی بگیرید که شماره‌های ۳،۲،۱ و ۴ را با نقطه‌ی به طول ۱ و شماره‌ی ۵ را با نقطه‌ی به طول ۲، و شماره‌ی ۶ را با نقطه‌ی به طول ۳ از محور اعداد حقیقی متناظر کند (مطابق شکل ۳)

در این صورت

$$\begin{cases} X\,(\text{شماره‌ی ۱}) = X\,(\text{شماره‌ی ۲}) = X\,(\text{شماره‌ی ۳}) = X\,(\text{شماره‌ی ۴}) = ۱ \\ X\,(\text{شماره‌ی ۵}) = ۲ \\ X\,(\text{شماره‌ی ۶}) = ۳ \end{cases}$$

بنابراین جدول احتمال زیر به‌دست می‌آید.

x_i	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$



شکل ۳

توجه کنید که رخداد $(X=۱)$ یعنی رخداد پیشامد {شماره‌ی ۴, شماره‌ی۳, شماره‌ی۲, شماره‌ی۱}،و می‌دانیم این پیشامد دارای احتمال $\frac{۴}{۶}$ است. Δ

در متغیرهای تصادفی این سه مثال، تعداد مقادیری که هر متغیر اختیار می‌کرد متناهی بود. متغیر تصادفی را در احتمال مقدماتی به صورت زیر تعریف می‌کنند :

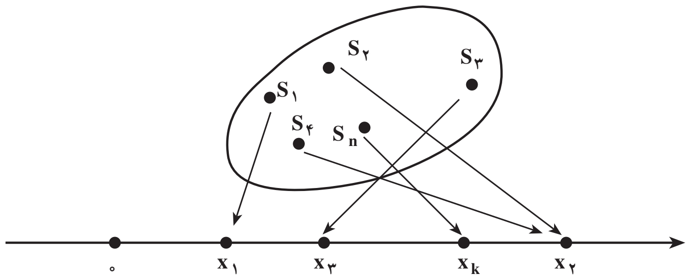
تعریف متغیر تصادفی[1] تابعی از فضای نمونه‌ای S بر اعداد حقیقی است. این تابع را با X نشان می‌دهیم.

همان‌طور که در مثال‌های قبل دیدیم مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک فضای نمونه‌ای جدید است. اگر حوزه‌ی مقادیر X متناهی یا شمارا نامتناهی باشد متغیر تصادفی X را **گسسته** می‌گوییم. برای درک مطلب فرض کنید فضای نمونه‌ای $S=\{s_۱,\cdots,s_n\}$ را داریم و احتمال‌هایی که به ترتیب به برآمدهای S تخصیص داده‌ایم $p_۱,p_۲,\cdots,p_n$ باشند. تابعی مانند X را درنظر می‌گیریم که حوزه‌ی تعریف آن S و حوزه‌ی مقادیر آن نقاطی از محور اعداد حقیقی است، به قسمی که هر برآمد یا هر پیشامد S ، با نقطه‌ای از محور مزبور متناظر باشد. در این صورت مطابق شکل ۴،

۱ــ در واقع متغیر تصادفی، نه متغیر است و نه تصادفی است، بلکه یک تابع روی مدل احتمال است.

$$X(s_1) = x_1, X(s_2) = x_2, X(s_3) = x_3, X(s_4) = x_2, \cdots, X(s_n) = x_k$$

تابع X ، متغیر تصادفی است و x_1 ، x_2 ، ... و x_k مقادیر آن هستند.



شکل ۴

۹ــ۲ــ تابع جرم احتمال

تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابعی است که به هریک از مقادیر X ، یعنی به هر یک از x_i ها $i = 1, 2, \cdots, k$ احتمال $P(X = x_i) = p_i$ را نسبت می‌دهد. به صورت جدول، داریم :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

بدیهی است که $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. اگر نقاط به طول x_1 ، x_2 ، ... و x_k را نقاطی مادّی تلقی کنیم می‌توانیم p_1 ، p_2 ، ... و p_k را بــه ترتیب جرم این نقاط بگیریم. بــه همین دلیل رابطـه‌ی

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

را **تابع جرم احتمال** یا صرفاً **تابع احتمال** متغیر تصادفی X می‌نامند. جدول بالا نشان می‌دهد که مقدار کل احتمال ۱ به چه ترتیب بین مقادیر متغیر X **توزیع** شده است و آن را جدول توزیع احتمال می‌گویند. تعداد مقادیری که X پذیرفته است متناهی هست. گاهی تعداد مقادیری که X اختیار می‌کند نامتناهی ولی شماراست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ : جامعه‌ی کودکان زیر ده سال را درنظر بگیرید. هر کودک را برای این‌که ببینید به بیماری هموفیلی مبتلاست یا نه آزمایش می‌کنند. فرض کنید متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کنیم :

$X =$ تعداد کودکانی که باید آزمایش شوند تا اولین مورد هموفیلی ظاهر شود

ببینیم که X چه مقادیری را انتخاب می‌کند. ممکن است اولین نفری که در جامعه‌ی مزبور آزمایش می‌شود به هموفیلی مبتلا باشد پس در این صورت $X=1$. ممکن است اولین نفر مبتلا نبوده، دومین نفر مبتلا باشد پس $X=2$ و نظایر آن. می‌توانید مجسم کنید که ممکن است یک میلیون کودک آزمایش شوند و کودکی مبتلا پیدا نشود یعنی X می‌تواند بیش از یک میلیون هم باشد. به همین ترتیب مقادیری که X می‌تواند اختیار کند شمارا بوده ولی نامتناهی است. در این حالت داریم

$$P(X=x_i)=p_i \ , \ i=1,2,\cdots$$

بدیهی است، $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$. یعنی باید احتمال ۱ را بین بی‌نهایت مقدار x_i توزیع کرد. Δ

تذکر: هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X دارای ویژگی‌های زیر است :

۱ـ $0\leq P(X=x_i)\leq 1 \quad , \quad i=1,2,\cdots$

۲ـ $\sum_i P(X=x_i)=1$

برعکس اگر تابعی به صورت $P(X=x_i)=p_i \ , i=1,2,\cdots$ دارای دو ویژگی بالا باشد یک تابع احتمال است.

مثال ۵: سکه‌ای را متوالیاً می‌اندازیم. سکه منصف نیست. تعداد دفعاتی که سکه را می‌اندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود متغیر تصادفی X می‌نامیم.

الف) X چه مقادیری اختیار می‌کند؟ ب) احتمال رخداد هر مقدار X چیست؟

الف) ممکن است در بار اول رو ظاهر شود پس $X=1$. اگر بار اول رو ظاهر نشود ولی بار دوم رو بیاید $X=2$. به همین ترتیب ممکن است تا پرتاب شماره‌ی ۳، ۴، ۵،...، ۱۰۰۰،... برای بار اول رو ظاهر نشود، پس X همه‌ی مقادیر صحیح طبیعی را اختیار می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم در پرتاب i ام برای اولین بار رو بیاید می‌خواهیم احتمال این پیشامد یعنی $P(X=i)$ را به‌دست آوریم. اگر در یک بار انداختن سکه، H معرف برآمد رو و T معرف برآمد پشت باشد، پیشامد

$$\underbrace{TT\cdots T}_{\text{بار } (i-1)}H$$

بدین معناست که $i-1$ بار متوالیاً پشت بیاید و در i امین بار رو ظاهر شود. باید احتمال این پیشامد را که مستلزم رخداد i برآمد است به‌دست آوریم. سکه منصف نیست یعنی احتمال رو آمدن و احتمال پشت آمدن $\frac{1}{2}$ نیست. فرض می‌کنیم احتمال ظاهر شدن رو p و احتمال ظاهر شدن پشت q

باشد. واضح است که $p+q=1$. هر انداختن سکه از انداختن‌های دیگر مستقل است. حال قبل از محاسبه‌ی احتمال موردنظر متذکر می‌شویم که اگر برای چند آزمایش تصادفی جدا از هم فضاهای نمونه‌ای و مدل‌های احتمال را بسازیم و اگر A_1 پیشامدی از فضای اول، A_2 پیشامدی از فضای دوم، ... باشد آن‌گاه شرط استقلال A_1 ، A_2 ، ... از هم را به‌صورت زیر بیان می‌کنند.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) = P(A_1).P(A_2)\cdots$$

پس، اگر برای هر انداختن سکه یک فضای نمونه‌ای درنظر بگیریم، آن‌گاه مثلاً

$$P(TT) = q.q = q^2$$

به همین ترتیب :

$$P(\underbrace{TT\cdots T}_{\text{بار } (i-1)}) = \underbrace{q.q\cdots q}_{\text{بار } (i-1)} = q^{i-1}$$

و بالاخره :

$$P(\underbrace{TT\cdots T}_{\text{بار } (i-1)}H) = q^{i-1}.p$$

پس :

$$P(X=i) = q^{i-1}.p$$

اگر i را برابر ۱، ۲، ... بگیریم احتمال‌های متناظر با مقادیر X به‌دست می‌آیند. جدول زیر را می‌توانیم بنویسیم

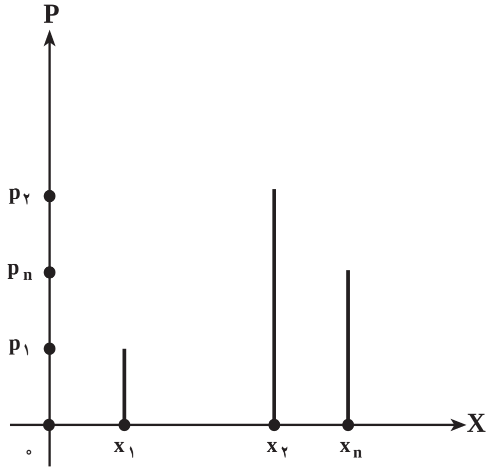
x_i	۱	۲	۳	$\cdots$	i	$\cdots$
p_i	p	qp	q^2p	$\cdots$	$q^{i-1}p$	$\cdots$

رابطه‌ی $P(X=i)=q^{i-1}p$ ، $i=1,2,\ldots$ تابع احتمال متغیر تصادفی X است. Δ

شما می‌توانید به میل خود جدولی تشکیل دهید که سطر اول مقادیر متغیر تصادفی X باشد (هر مقداری که مایل هستید به آن نسبت دهید) و سطر دوم آن احتمال‌هایی دلخواه باشند، فقط لازم است که مجموع احتمال‌ها ۱ باشد. اگر هر مقداری را که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند طول یک نقطه، و احتمال متناظر با آن را عرض آن نقطه نسبت به دو محور متعامد بگیریم نموداری برای احتمال X به‌دست می‌آوریم.

لازم نیست که واحد طول را روی دو محور یکی بگیریم. عرض‌های نقاط، مقادیر p_1 ،

p_2 ، ... و p_n هستند که همه بین صفر و یک‌اند. طول‌های نقاط، مقادیر x_1 ، x_2 ، ...، x_n هستند (مطابق شکل ۵).



شکل ۵ ــ نمودار میله‌ای

در واقع می‌توان طول میله‌های بالای x_1 ، x_2 ، ...، x_n را احتمال‌های متناظر با آن‌ها گرفت. این نمودار را نمودار میله‌ای می‌نامند. برای هر تابع احتمال گسسته می‌توانید چنین نموداری رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم می‌توانیم جدول‌های توزیع احتمال دلخواه فراوانی بنویسیم اما آن جدول‌ها و مدل‌هایی مورد توجه‌اند که ارزش کاربردی داشته باشند. ذیلاً چند توزیع احتمال مهم را ذکر می‌کنیم.

۹ــ۳ــ توزیع برنولی

وقتی لامپی را امتحان می‌کنیم ممکن است سالم باشد یا معیوب. به‌طور کلی وقتی کالایی را در موقع خرید امتحان می‌کنیم یا سالم است و یا ناقص. وقتی از فردی در مورد اعتیادش به سیگار سؤال می‌کنیم یا سیگاری است یا نیست. از این پدیده‌های دو حالتی زیادند. اگر سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را با $X=1$ و ناقص بودن کالا و سیگاری نبودن فرد را با $X=0$ نشان دهیم متغیری تصادفی داریم که دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کند. این آزمایش‌های دو حالته را امتحان می‌نامیم و فضای نمونه‌ای هر امتحان دو برآمد دارد. ریختن سکه هم یک امتحان است.

اگر احتمال سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را p بگیریم احتمال ناقص بودن کالا و یا سیگاری نبودن فرد برابر q است. پس جدول توزیع احتمال زیر را برای هر امتحان داریم

x_i	۰	۱
p_i	q	p

$$p+q=1$$

مرسوم است که دوبرآمد امتحان را پیروزی و شکست می‌نامند. برآمدی که مورد توجه است پیروزی نامیده می‌شود. مثلاً ممکن است لامپ‌ها را یک به یک برای یافتن لامپی معیوب امتحان کنیم، در این صورت یافتن لامپ معیوب یک پیروزی است. این جدول را می‌توان به صورت رابطه‌ی زیر هم خلاصه کرد.

$$P(X=i)=\begin{cases} p^i q^{1-i} & i=0,1 \\ 0 & \text{به ازای سایر مقادیر } i \end{cases}$$

به‌طورکلی اگر پیشامد A از یک فضای نمونه‌ای را درنظر بگیریم و رخداد A را پیروزی گرفته، احتمال پیروزی را p فرض کنیم، آن‌گاه متغیر تصادفی X که به صورت

$$\begin{cases} X=1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ X=0 & \text{اگر } A \text{ رخ ندهد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود دارای تابع احتمال بالاست.

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار ۰ و یک را می‌پذیرد متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را **توزیع برنولی** می‌گویند.

۹ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ پنج سکه‌ی منصف را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.

۲ــ دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو تاس تعریف می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) تابع احتمال X را به‌دست آورید.

پ) احتمال این که $X \leq ۷$ باشد چه‌قدر است؟

۳ــ یک تاس پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X = \begin{cases} ۱ & \text{اگر عدد فرد بیاید،} \\ ۲ & \text{اگر عدد زوج بیاید،} \end{cases}$$

الف) تابع احتمال X را بیابید.

ب) آیا X یک متغیر تصادفی برنولی است؟

۴ــ سکه‌ای منصف را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا «شیر» بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که براساس آن بتوان احتمال شیر آمدن را محاسبه کرد.

پ) احتمال این که اولین بار در آزمایش صدم شیر ظاهر شود چه‌قدر است؟

۵ــ توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$P(X = i) = \frac{i}{i^۲ + ۳} \qquad i = ۱, ۲, ۳$$

$$P(X = j) = \frac{۱}{۱۴} \qquad j = ۴, ۵, ۶$$

الف) جدول توزیع X را بسازید.

ب) نمودار توزیع را رسم کنید.

پ) مقدار $P(X \geq ۳)$ را حساب کنید.

۶ــ احتمال این که فردی مسن مبتلا به دیابت باشد $\frac{۱}{۸۰}$ است. در روستایی مردان مسن را تحت آزمایش قرار می‌دهند. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد افرادی تعریف کنیم که به ترتیب آزمایش می‌شوند تا اولین فرد دیابتی مشخص شود، تابع احتمال متغیر X را به‌دست آورید. احتمال این که دومین نفر دیابتی باشد چه‌قدر است؟

۷ــ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی ۳ برآمد دارد اگر احتمال‌های متناظر با ۳ برآمد به ترتیب $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۶}$ باشد متغیری تصادفی روی این فضا تعریف کنید.

۸ــ نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است.

$$P(X = x) = \frac{۱}{n^۲}[۲(n - x) + ۱] \quad , \quad x = ۱, ۲, \ldots, n$$

مراجع

1 - S. Ross, A First Course in Probability, Macmilan 1976.

۲ــ جان فروند و رانلد والپول، آمار ریاضی ترجمه‌ی علی عمیدی و محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ سوم ۱۳۷۳.

۳ــ جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس ۱۳۶۸.

۴ــ علی عمیدی، احتمال و کاربرد آن، انتشارات دانشگاه پیام نور ۱۳۷۴.