نام دبیر:معصومه نوربخش	نام درس: ریاضی
نام آموزشگاه:	مقطع و رشته:سوم تجربی
نام دوره:	شماره جلسه: نوزدهم

مبـــــحث:تعمیم حد

صفحه کتاب درسی:

نام کتاب	تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان									
برای کلاس دبیر و کار در کلاس										
برای کار در منزل										

در محاسبات حد، هر گاه x به یک نقطه مانند a نزدیک شود و مقدارتابع از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر و یا از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر گردد، آنگاه حاصل حد به ترتیب $-\infty$ یا $+\infty$ می شود.

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ی I تعریف شده باشد و نقطه ی a به گونه ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد، گوئیم حد تابع f وقتی x به سمت a نزدیک می شود، به سمت $+\infty$ می رود، هرگاه وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، آنگاه f(x) از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر گردد و می نویسیم: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ی I تعریف شده باشد و نقطه ی a به گونه ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد، گوئیم حد تابع f وقتی x به سمت a نزدیک می شود، به سمت $-\infty$ می رود، هرگاه وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، آنگاه f(x) از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر شود و می نویسیم: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

صفر حدی: در تابع $f(x) = x - 1$ وقتی از سمت راست عدد یک به آن نزدیک شویم مقدار f(x) به سمت صفر نزدیک می شود و داریم $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 1^+ - 1 = 0$ که چون متغیر x هیچ گاه دقیقا مقدار یک را اختیار نمی کند، پس حاصل حد نیز دقیقا خود عدد صفر نیست، بلکه با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می شود.در چنین حالتی صفر حدی داریم و آنرا با 0^+ نمایش می دهیم.به طور مشابه حد چپ این تابع در $x = 1$ نیز صفر حدی تولید می کند.

گاهی در توابع کسری با نزدیک شدن x به سمت a ، مخرج کسر به عدد صفر نزدیک می شود و در نتیجه مقدار کسر بزرگ و بزرگتر یا کوچک و کوچکتر می شود و کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ می رود.در بیشتر موارد محاسبه ی این حد ها به کمک قضیه ی زیر صورت می گیرد.

قضیه: فرض کنید $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و g(x) با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک شود، آنگاه: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L>0}{0^+} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و g(x) با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک شود، آنگاه: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L>0}{0^-} = -\infty$

ج) اگر $L < 0$ و g(x) با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک شود، آنگاه: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L<0}{0^+} = -\infty$

د) اگر $L < 0$ و g(x) با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک شود، آنگاه: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L<0}{0^-} = +\infty$

تعریف: تابع f را که در بازه ی $(a,+\infty)$ تعریف شده استدر نظر می گیریم.اگر وقتی x در این بازه از هر عدد مثبت بسیار بزرگی، بزرگتر شود آنگاه f(x) به عدد حقیقی L نزدیک شود، می نویسیم: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

تعریف: تابع f را که در بازه ی $(-\infty, a)$ تعریف شده است در نظر می گیریم.اگر وقتی x در این بازه از هر عدد منفی بسیار کوچکی، کوچکتر شود آنگاه f(x) به عدد حقیقی L نزدیک شود، می نویسیم: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

نکات:

1) $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد.} \\ -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \end{cases}$

2) **اگر a عدد حقیقی باشد و $a \neq 0$ ، حد تابع $f(x) = ax^n \ ; n \in N$ را وقتی $x \to -\infty$ یا $x \to +\infty$ می توان با توجه به بند 1 و علامت a بدست آورد.**

حد چندجمله ای ها و توابع کسری وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ می رود: حد چندجمله ای $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + l$ وقتی $x \to -\infty$ یا $x \to +\infty$ ، برابر حد جمله ای است که بزرگترین توان را دارد.یعنی:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \cdots + l) = \lim_{x \to \pm\infty} ax^n$$

توجه: در توابع کسری در صورتی که x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برود، اگر درجه ی صورت بیشتر از درجه ی مخرج باشد، کسر به سمت ∞ می رود، اگر درجه ی صورت و مخرج با هم برابر باشند، حاصل حد برابر یک عدد مخالف صفر است و چنان چه درجه ی صورت کمتر از درجه ی مخرج باشد، حاصل حد برابر صفر است.

تمرین: حدود زیر را محاسبه کنید.

آ) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1}$

ب) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - \sqrt{x^2+4x}}{1-x}$

پ) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2x-3)^2 + (3x+2)^3}{(2x+1)^5}$