

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پر تکرار و تابستان

نام کتاب

برای کلاس دبیر و کار در کلاس

برای کار در منزل

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنه ی D_f و D_g باشند در این صورت:

1) مجموع، تفاضل و حاصل ضرب این توابع را به ترتیب به صورت $(f+g)$ ، $(f-g)$ و $(f.g)$ نمایش داده و آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

در حقیقت این سه تابع عرض نقاط هم طول، یعنی $f(x)$ و $g(x)$ را به ترتیب با هم جمع، از هم کم و در هم ضرب می کنند. در واقع این توابع روی یک طول مشترک اثر کرده و عرض آنها را جمع، تفریق و در هم ضرب می کنند. چون در این تعاریف از دو تابع استفاده می کنیم، لذا دامنه ی تعریف آنها عبارت است از:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

2) تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

در حقیقت این تابع عرض نقاط هم طول را بر هم تقسیم می کند. چون تعریف شدن این تابع نیز به کمک توابع f و g می باشد، ولی از آنجایی که g در مخرج واقع شده است، لذا باید از اشتراک دو تابع نقطه ای که g را صفر می کنند خارج کنیم. یعنی:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

نکته: اگر k عدد حقیقی باشد، آنگاه ضرب توابع در این عدد حقیقی به صورت زیر قابل تعریف است:

$$(kf)(x) = kf(x)$$

$$K(f \pm g)(x) = k(f(x) \pm g(x)) = kf(x) \pm kg(x)$$

$$K\left(\frac{f}{g}\right)(x) = k\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{kf(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

$$K(f.g)(x) = kf(x) \times g(x) = f(x) \times kg(x)$$

ترکیب دو تابع: فرض کنید f تابعی از A به B و g تابعی از B به C باشد، یعنی $\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ g : B \rightarrow C \end{cases}$. تابع f اعضای A را به مجموعه B برده و تابع g مقادیر B را به مجموعه C می برد. حال تابعی تعریف می کنیم که مستقیماً مقادیر A را به مجموعه C ببرد. این تابع را $g \circ f$ می نامیم و آن را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

باید توجه داشت که لزومی ندارد برد تابع f و دامنه g با هم یکی باشد. تابع f اعضای دامنه را به برد خود (R_f) به صورت $f(x)$ می برد، اما تابع g فقط قادر به اثر کردن روی $f(x)$ هایی است که در اشتراک برد f و دامنه g قرار دارند و پس از اثر روی آنها، این مقادیر را به فرم $g(f(x))$ در برد خود (R_g) قرار می دهد. طبق تعریف، ترکیب توابع f و g مستقیماً این عمل را انجام می دهد. یعنی:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

و این بدین معناست که برای محاسبه $g(f(x))$ ابتدا f روی x اثر می کند و سپس g روی $f(x)$ اثر می کند.

تذکر: اگر قانون تابع f معلوم باشد، برای تعیین ضابطه $f(f(x))$ در ضابطه f هر جا که متغیر x باشد، به جای آن $f(x)$ قرار می دهیم و برای تعیین ضابطه $f(g(x))$ در ضابطه f هر جا که متغیر x باشد، به جای آن $g(x)$ قرار می دهیم. زیرا همان طور که گفتیم قانون تابع روی همه y مقادیر تابع یکسان عمل می کند.

تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 3$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشند، مطلوب است محاسبه $f \circ g$ و نیز حاصل $f \circ g(1)$ و $g \circ g(5)$.

تمرین: دامنه y تابع $f(x) = \log_{\sqrt{x-1}}(x-4) \cot 3x$ را بیابید.