

نام دبیر: معصومه نوربخش

نام درس: حسابان

نام آموزشگاه:

مقطع و رشته: سوم ریاضی

نام دوره:

شماره جلسه: سی و یکم

مبحث: مشتق توابع مثلثاتی - مشتق تابع وارون

صفحه کتاب درسی:

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان

نام کتاب

برای کلاس دبیر و  
کار در کلاس

برای کار در منزل

### مشتق توابع مثلثاتی:

$$1) f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$2) f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$3) f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$4) f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y = \frac{5 \sin x}{1 - \cos x} \text{ (الف)}$$

$$y = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \text{ (ب)}$$

$$y = \frac{x + \tan x}{1 - \cot x} \text{ (ج)}$$

$$y = \frac{x \cos x}{1 - \sin x \cdot \tan x} \text{ (د)}$$

**مشتق تابع وارون:** فرض کنید  $f$  تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن را با  $f^{-1}$  نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$(a,b) \in f \leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$$

شیب خط مماس بر  $f$  در نقطه  $y = a$  واقع بر آن را برابر  $m$  و شیب خط مماس بر  $f^{-1}$  در نقطه  $x = b$  را برابر  $m'$  در نظر می گیریم و داریم:

$$m = f'(a)$$

$$m' = (f^{-1})'(b)$$

لذا از آنجا که نمودار های  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به خط  $y = x$  متقارن هستند، خطوط مماس بر آن ها هم در نقاط  $A(a,b)$  و  $A'(b,a)$  نسبت به  $y = x$  متقارن هستند و برای هر دو خط متقارن نسبت به  $y = x$  داریم:

$$m' = \frac{1}{m} \rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

این نتیجه نشان می دهد که باید  $f'(a) \neq 0$ .

اگر  $f'(a) \neq 0$ ، خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $A(a,b)$  موازی محور  $x$  ها خواهد بود و در نتیجه خط مماس بر نمودار  $f^{-1}$  در نقطه  $A'(b,a)$  موازی محور  $y$  ها خواهد بود که به معنای آن است که  $f^{-1}$  در  $b$  مشتق پذیر نیست. به طور کلی قضیه ی زیر برقرار است:

**قضیه:** اگر  $f$  تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن تابع  $g$  باشد، در این صورت  $g$  نیز مشتق پذیر است و داریم:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

**تمرین:** مشتق وارون تابع  $f(x) = x^k$  را بدست آورید.

**تمرین:**  $g(x) = \sin^{-1}x$  وارون تابع  $f(x) = \sin x$  است که دامنه ی  $f$  را به فاصله ی  $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  محدود کرده ایم. دامنه ی  $g$  فاصله ی  $[-1,1]$  است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای  $x$  های در فاصله ی  $(-1,1)$  داریم:  $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**مشتق توابع وارون مثلثاتی:**

- 1)  $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 2)  $(\cos^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 3)  $(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$