

نام دبیر: معصومه نوربخش

نام درس: حسابان

نام آموزشگاه:

مقطع و رشته: سوم ریاضی

نام دوره:

شماره جلسه: بیست و هشتم

مبحث: مماس و قائم بر منحنی

صفحه کتاب درسی:

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان										نام کتاب
										برای کلاس دبیر و کار در کلاس
										برای کار در منزل

مماس و قائم بر منحنی از نقطه ای روی منحنی: حال که فرمول های مشتق گیری از توابع را فرا گرفته اید، با یادآوری مفاهیم مماس و قائم بر منحنی به حل مسائل مربوطه می پردازیم. مطابق آنچه که آموختید، خط مماس بر نمودار f در نقطه $P = (x_0, f(x_0))$ خطی است که از نقطه P می گذرد و شیب آن برابر $f'(x_0)$ است. پس معادله ی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

تعبیر هندسی مشتق: مقدار مشتق تابع مفروض $f(x)$ در نقطه x_0 ، یعنی $f'(x_0)$ ، در صورت وجود، برابر با شیب خط مماس بر منحنی این تابع در نقطه x_0 می باشد.

تمرین: در تابع $f(x) = x^2 + 1$ ، معادله ی خط مماس بر تابع در نقطه $(1, 2)$ را بدست آورید.

همچنین در مورد خط قائم بر منحنی، به خاطر دارید که:

تعریف: خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه ای مفروض، خطی است که بر خط مماس در آن نقطه عمود می شود.

بنابراین، از آنجا که بین شیب های دو خط عمود بر هم رابطه ی $m = \frac{-1}{m}$ وجود دارد، شیب خط قائم بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه $(x_0, f(x_0))$ ، در صورت وجود $f'(x_0)$ ، برابر $\frac{-1}{f'(x_0)}$ خواهد بود و معادله ی آن به صورت زیر است:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

دقت کنید که اگر $f'(x_0) = 0$ باشد، یعنی مماس بر تابع افقی است، پس قائم بر تابع در آن نقطه عمودی خواهد بود و شیب آن در این وضعیت تعریف نشده است.

تمرین: در مثال قبل، معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه ای به طول $x = 1$ واقع بر نمودار آن بدست آورید.

مماس بر منحنی از نقطه ای خارج منحنی: می خواهیم از نقطه $A(a, b)$ خارج منحنی $y = f(x)$ رسم کنیم. برای یافتن معادله ی مماس، فرض می کنیم نقطه ی تماس $T(\alpha, f(\alpha))$ باشد. حال شیب خط را از دو طریق متفاوت بدست آورده و با هم مساوی قرار می دهیم:

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\alpha) - b}{\alpha - a} = f'(\alpha)$$

از حل معادله ی فوق بر حسب α ، یک یا چند مقدار برای α بدست می آید. در نهایت با استفاده از مقدار α ، معادله ی مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$Y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

تمرین: معادله ی مماس بر منحنی $f(x) = x^2$ را از نقطه ی $(-1, 0)$ خارج از آن بدست آورید.

مماس بودن منحنی دو تابع بر هم: منحنی توابع f و g بر هم مماس اند اگر هر دو از یک نقطه مانند $A(x_0, f(x_0) = g(x_0))$ بگذرند و در این نقطه

یک مماس مشترک داشته باشند. به بیان دیگر منحنی دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در نقطه ای به طول $x = x_0$ بر هم مماس اند اگر:

$$(1) \quad f(x_0) = g(x_0) \text{ باشد.}$$

$$(2) \quad f'(x_0) = g'(x_0) \text{ باشد.}$$

تمرین: عرض از مبدا خط $y = x + h$ را به گونه ای تعیین کنید که این خط بر منحنی $y = x^2 + 1$ مماس شود.

تمرین: معادله ی خط قائم بر منحنی $y = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 1$ را در نقطه ای به طول 2 واقع بر منحنی بنویسید.

تمرین: از نقطه ی $A(1,0)$ که خارج از منحنی $y = x^2 + 2x - 1$ است دو مماس بر منحنی رسم شده است. طول نقاط برخورد خطوط مماس با منحنی را بدست آورید.