

نام دبیر: معصومه نوربخش

نام درس: حسابان

نام آموزشگاه:

مقطع و رشته: سوم ریاضی

نام دوره:

شماره جلسه: بیست و پنجم

مبحث: خط مماس بر منحنی ها و مشتق توابع

صفحه کتاب درسی:

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان

نام کتاب

برای کلاس دبیر و
کار در کلاس

برای کار در منزل

خط مماس: برای تعیین این خط و نوشتن معادله ی آن، باید شیب آن را بدست آوریم. سپس با در دست داشتن مختصات یک نقطه از این خط می

توانیم معادله ی آن را بنویسیم. اگر مختصات نقطه ی $A(x_0, f(x_0))$ و مختصات نقطه ی متحرک $B(x, f(x))$ را در نظر بگیریم، شیب خط گذرنده از A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

حال با نزدیک شدن B به A داریم:

$$m_d = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر $x - x_0 = h$ باشد، آن گاه $x = x_0 + h$ بنابراین به رابطه ی مشابه زیر می رسیم:

$$m_d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

در نهایت، با جایگذاری شیب بدست آمده در رابطه ی $y - y_0 = m_d(x - x_0)$ ، به معادله ی خط مماس در نقطه ی $A(x_0, y_0)$ دست می یابیم.

تمرین: روی نمودار $f(x) = x^3$ نقطه ی ثابت $A(a, a^3)$ را در نظر بگیرید. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h ، نقطه ی $B(a+h, (a+h)^3)$ را روی نمودار در نزدیکی نقطه ی A در نظر بگیرید.

(الف) شیب خط AB را بدست آورید.

(ب) با نزدیک شدن h به صفر، شیب خط AB به چه مقداری نزدیک می شود؟

(ج) معادله ی مماس بر منحنی را در نقطه ی $A(a, a^3)$ بدست آورید.

تعریف ریاضی مشتق: اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی x_0 تعریف شده در این صورت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ را در صورت وجود، مشتق تابع f در x_0

می نامیم و آن را با $f'(x_0)$ نشان می دهیم و می نویسیم:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر $x - x_0 = h$ را در نظر بگیریم به تعریف ریاضی دیگری، معادل با تعریف فوق می‌رسیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{f}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

توجه: اگر حد بالا موجود باشد در این صورت تابع f را در مشتق پذیر و در غیر این صورت مشتق ناپذیر گوئیم.

رابطه‌ی مشتق و معادله‌ی خط مماس: فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشد. در این صورت نمودار f در اطراف a یک منحنی است که می‌توان در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ بر آن خط مماسی با شیب $f'(a)$ رسم کرد، پس معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A به صورت زیر می‌باشد:

$$Y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

تمرین: مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه‌ی دلخواه $x = a$ محاسبه کنید و به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(-1, 1)$ بدست آورید.

تمرین: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x) = \cos x$ را در نقطه‌ی $x = a$ بنویسید.

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

(الف) $f(x) = 2x - x^2 \quad (x_0 = 0)$

(ب) $g(x) = \sqrt{5x - 1} \quad (x_0 = 2)$

(ج) $h(x) = 2\sin x - 1 \quad (x_0 = \frac{\pi}{2})$

(د) $k(x) = \frac{x}{x-1} \quad (x_0 = 2)$