نام دبیر:معصومه نوربخش	**نام درس: حسابان**
نام آموزشگاه:	**مقطع و رشته:سوم ریاضی**
نام دوره:	**شماره جلسه: بیست و چهارم**

مبـــــحث:پیوستگی

صفحه کتاب درسی:

نام کتاب	تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان									
برای کلاس دبیر و کار در کلاس										
برای کار در منزل										

پیوستگی در نقطه: اگر تابع f در x = a و نیز در یک همسایگی این نقطه تعریف شده باشد و حد تابع در x = a موجود و برابر با f(a) باشد، در این صورت می گوئیم f(x) در x = a پیوسته است.به عبارت دیگر اگر $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ، آن گاه f(x) در x = a پیوسته است.

تمرین: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ **را در x = 3 بررسی کنید.**

نمودار تابع پیوسته به صورت یک پارچه است.در نتیجه بدون برداشتن قلم از روی کاغذ می توان نمودار تابع را در هر محدوده ای رسم نمود.

توجه: اگر f در همسایگی a تعریف نشده باشد و یا تساوی $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ به هر دلیلی برقرار نباشد، تابع f در x = a ناپیوسته خواهد بود.

تمرین: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ **را در x = 0 بررسی کنید.**

پیوستگی راست و چپ: اگر برای تابع f در نقطه ی از دامنه اش داشته باشیم: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ می گوئیم تابع f در پیوستگی راست دارد و اگر $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ می گوئیم، تابع در پیوستگی چپ دارد.

تمرین: با توجه به نمودار تابع f(x) = [x] پیوستگی آن را در همه ی نقاط بررسی کنید.

پیوستگی در بازه:

تابع f در بازه ی (a,b) پیوسته است، هر گاه f(x) در تمام نقاط درون بازه، یعنی به ازای هر $x_0 \in (a,b)$ پیوسته باشد.

$$x_0 \in (a,b) \xrightarrow{\text{پیوستگی در نقاط میانی بازه}} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

تابع f در بازه ی [a,b) پیوسته است، هر گاه در (a,b) پیوسته باشد و در x = a پیوستگی راست داشته باشد.

$$x_0 \in (a,b) \xrightarrow{\text{پیوستگی در نقاط میانی بازه}} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ و } \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

تابع f در بازه ی $(a,b]$ پیوسته است، اگر در (a,b) پیوسته باشد و در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

$$x_0 \in (a,b) \xrightarrow{\text{پیوستگی در نقاط میانی بازه}} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ و } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته است، اگر در (a,b) پیوسته باشد و در $x = a$ پیوستگی راست و در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

$$x_0 \in (a,b) \xrightarrow{\text{پیوستگی در نقاط میانی بازه}} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ و } \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ و } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

تمرین: پیوستگی تابع $f(x) = [x]$ با دامنه ی $[0,2]$ را بررسی کنید.

نکته: توابع چندجمله ای در هر نقطه ای پیوسته اند.

نکته: توابع $\sqrt[k]{x}$ ، $\sin x$ ، $\cos x$ و b^x در همه ی نقاط دامنه ی خود پیوسته اند.

تابع پیوسته: اگر تابعی در تمام نقاط دامنه ی خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می نامیم.درنتیجه توابع چندجمله ای و نیز توابع $\sqrt[k]{x}$ ، $\sin x$ ، $\cos x$ و b^x توابعی پیوسته محسوب می شوند.

تمرین: پیوستگی تابع $y = \frac{1}{x}$ را بررسی کنید.

توجه: توابعی که دامنه ی آن ها به صورت بازه است، برای پیوستگی باید تابع روی آن بازه پیوسته باشد.

قضیه: هر گاه توابع f و g در پیوسته باشند آن گاه:

توابع $f + g$ ، $f - g$ و $f.g$ نیز در پیوسته اند و در $x = 0$ به شرط این که پیوسته خواهد بود.

قضیه: اگر تابع f در a حد داشته باشد و تابع g در $b = f(a)$ پیوسته باشد، آن گاه تابع gof در a حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \to a}(gof(x)) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = g \lim_{x \to a}(f(x))$$

در این حالت اصطلاحا گوئیم که نماد lim از توابع پیوسته عبور می کند.

تمرین: پیوستگی تابع $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

تمرین: مقدار a را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = a[1 - x] + [x]$ در $x = 1$ پیوستگی راست داشته باشد.