

نام دبیر: معصومه نوربخش

نام درس: حسابان

نام آموزشگاه:

مقطع و رشته: سوم ریاضی

نام دوره:

شماره جلسه:

مبحث: صفر صفرم های جبری و مثلثاتی

صفحه کتاب درسی:

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان										نام کتاب
										برای کلاس دبیر و کار در کلاس
										برای کار در منزل

در بررسی حد توابع کسری وقتی x به سمت a نزدیک می شود، گاهی اوقات حد صورت و مخرج همزمان صفر می شود که به چنین وضعیتی صفر صفرم و یا اصطلاحاً حالت مبهم می گوئیم. در چنین حالتی برای تعیین مقدار حد تابع، ابتدا باید عوامل صفر کننده را از صورت و مخرج یافته و سپس حذف کنیم که به این عملیات، اصطلاحاً رفع ابهام می گویند. برای این کار می توان از روش های زیر استفاده کرد:

1) با استفاده از اطلاعات ریاضیات پایه و اتحاد های مشهور جبری: اگر در صورت و مخرج کسر، دو چندجمله ای باشند و در محاسبه ی حد در $x = a$ به حالت $\frac{0}{0}$ برسیم، بدین معناست که صورت و مخرج بر $x - a$ بخش پذیرند. حال با تقسیم چندجمله ای ها بر $x - a$ در صورت و مخرج ایجاد کرده و پس از حذف آن به محاسبه ی حد می پردازیم.

تمرین: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را بیابید.

2) گویا کردن صورت و مخرج کسر (ضرب کردن در مزدوج): اگر صورت و مخرج کسر شامل توابع رادیکالی باشند و در محاسبه ی حد به حالت $\frac{0}{0}$ برسیم، آن گاه برای حذف عامل ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مخرج ضرب می کنیم و پس از حذف عامل ابهام به محاسبه ی حد می پردازیم.

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \text{ (الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} \text{ (ب)}$$

محاسبه ی حد در توابع کسری - صفر صفرم های مثلثاتی: در توابع کسری که صورت و مخرج شامل توابع مثلثاتی باشند، ممکن است با نزدیک شدن x به a ، حد تابع به صورت مبهم صفر صفرم تبدیل شود. در این حالت نیز با استفاده از روش هایی که در بالا گفته شد می توان عامل صفر کننده در صورت و مخرج را حذف کرد و رفع ابهام نمود.

تمرین: حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \text{ (الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \sqrt{\cos x}} \quad (\text{ب})$$

گاهی برای رفع ابهام توابع کسری، از اتحاد های جبری و مثلثاتی به طور همزمان استفاده می کنیم.

تمرین: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - \cos x)}{(x^2 + x) \sin x}$ را بدست آورید.

صفر مطلق و صفر حدی: اگر وقتی x به سمت a نزدیک می شود داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ عدد صفر بدست آمده در جواب حد، می تواند صفر مطلق و یا صفر حدی باشد که هر کدام را با یک مثال توضیح می دهیم.

صفر حدی: در تابع $f(x) = x - 1$ وقتی از سمت راست عدد یک به آن نزدیک شویم، مقدار $f(x)$ به سمت صفر نزدیک می شود و داریم:
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 1^+ - 1 = 0$ که چون متغیر x هیچ گاه دقیقاً مقدار یک را اختیار نمی کند، پس حاصل حد نیز دقیقاً خود عدد صفر نیست. در چنین حالتی صفر حدی داریم.

صفر مطلق: در تابع $f(x) = [x] - 1$ وقتی x از سمت راست به عدد 1 نزدیک می شود، داریم. بنابراین
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - 1) = [1^+] - 1 = 0$ بنابراین چون $[x]$ دقیقاً برابر یک می شود، پس صفر بدست آمده، صفر واقعی است که در چنین حالتی می گوئیم صفر مطلق داریم.

با توجه به دو نوع صفر حدی و مطلق، چهار حالت برای صفر صفرم داریم:

- | | | | |
|--|---|---|--|
| 1) $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} = \text{مبهم}$ | 2) $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$ | 3) $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$ | 4) $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$ |
|--|---|---|--|

در حالت $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ با استفاده از روش های رفع ابهام، حاصل حد را بدست می آوریم.

در حالت $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}$ حاصل حد برابر صفر می شود.

تمرین: حاصل حد های زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sin x]}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{[x]-1} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-1}{[\sin \frac{\pi}{2} x]} \quad (\text{ج})$$