نام دبیر:معصومه نوربخش	نام درس: حسابان
نام آموزشگاه:	مقطع و رشته:سوم ریاضی
نام دوره:	شماره جلسه: بیست و یکم

مبـــــحث:قضایای حد

صفحه کتاب درسی:

نام کتاب	تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان									
برای کلاس دبیر و کار در کلاس										
برای کار در منزل										

با استفاده از قضایای زیر می توان بدون رسم جدول و نمودار، حد تابع را در نقطه ی داده شده بدست آورد:

1) **حد تابع ثابت** $f(x) = c$ **در هر نقطه ای برابر** c **است.**

2) **حد تابع** $f(x) = x$ **در هر نقطه ای مانند** x_0 **برابر** x_0 **است.**

3) **برای هر عدد حقیقی** x_0 **داریم:** $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

4) **برای هر عدد حقیقی** x_0 **داریم:** $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

5) **اگر** n **عددی طبیعی و** x_0 **عضو دامنه ی** $\sqrt[n]{x}$ **باشد، داریم:** $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

6) **اگر** $b > 0$ **باشد، داریم:** $\lim_{x \to x_0} b^x = b^{x_0}$

7) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + M$

8) $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = L - M$

9) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x) = L \times M$

10) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$

تمرین: اگر $f(x) = 2x + 1$ **و** $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ **، آن گاه حد توابع** $f \pm g$ **و** $f \times g$ **و** $\frac{f}{g}$ **را در** $x = -1$ **محاسبه کنید.**

توجه 1: قضایای فوق می توانند فقط برای بررسی حد راست و یا حد چپ دو تابع f **و** g **مورد استفاده قرار گیرند.در این صورت وجود حداقل یک همسایگی راست ویا چپ در اطراف** a **ضروری می باشد.**

توجه 2: دقت کنید که قضایای فوق در صورتی برقرارند که توابع f **و** g **، در اطراف نقطه ی** a **دارای دامنه ی مشترکی باشند، در غیر این صورت شرط حدگیری که همان وجود همسایگی در اطراف نقطه ی** a **می باشد، برقرار نیست و حدگیری بی معناست.**

تمرین: حد تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ **را در نقطه ی** $x = 0$ **بررسی کنید.**

دقت کنید که از ترکیب قضایای فوق نتایج مهم زیر حاصل می شود:

1) $\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$

3) $\lim_{x \to x_0} x^n = {x_0}^n$

4) $\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$

5) $\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \cot x = \cot x_0$

7) **اگر** f(x) **مجموعی از توابع** x **و** sin x **و** cos x **و** tan x **و** cot x **با توان هایی طبیعی باشد، آن گاه:** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0 \;\to\; \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$

9) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0 \;\to\; \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

تمرین: حد تابع $g(x) = \sqrt[4]{-(x-2)^2}$ **را در نقطه ی** x = 2 **بررسی کنید.**

نکته: اگر $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **موجود باشد، برای بررسی حد** $\sqrt[n]{f(x)}$ **،باید دامنه ی تابع تعیین شود تا مطمئن شویم تابع** $\sqrt[n]{f(x)}$ **در همسایگی نقطه ی** a **تعریف شده باشد.**

توجه: در بررسی حد تابع y = [f(x)] **در نقطه ی** a **دو حالت زیر را خواهیم داشت:**

1) **اگر مقدار** f(a) **مقداری صحیح نباشد داریم:** $\lim\limits_{x \to a}[f(x)] = [f(a)]$

2) **اگر مقدار** f(a) **مقداری صحیح باشد، معمولا** $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]$ **وجود ندارد به جز موارد استثناء.توجه داشته باشید در این حالت، با قرار دادن مقادیر حدی** a **ابتدا مقدار داخل براکت را به صورت حدی محاسبه کرده سپس با توجه به خاصیت جزء صحیح پاسخ را تعیین می کنیم.**

توجه: دقت کنید در بررسی حد راست و چپ توابع مثلثاتی، ابتدا باید تعیین کنیم انتهای کمان تابع مثلثاتی در کدام ربع قرار می گیرد تا با توجه به آن، نحوه ی تغییراتش را مشخص کنیم.

$$X \to 0 \begin{cases} x \to 0^+ \xrightarrow{\text{کمان x در ربع اول قرار دارد}} \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \to [\sin x] = 0 \\ 0 < \cos x < 1 \to [\cos x] = 0 \end{cases} \\ x \to 0^- \xrightarrow{\text{کمان x در ربع چهارم قرار دارد}} \begin{cases} -1 < \sin x < 0 \to [\sin x] = -1 \\ 0 < \cos x < 1 \to [\cos x] = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$X \to \frac{\pi}{2} \begin{cases} x \to (\frac{\pi}{2})^+ \xrightarrow{\text{کمان x در ربع دوم قرار دارد}} \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \to [\sin x] = 0 \\ -1 < \cos x < 0 \to [\cos x] = -1 \end{cases} \\ x \to (\frac{\pi}{2})^- \xrightarrow{\text{کمان x در ربع اول قرار دارد}} \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \to [\sin x] = 0 \\ 0 < \cos x < 1 \to [\cos x] = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$X \to \pi \begin{cases} x \to \pi^+ \xrightarrow{\text{کمان x در ربع سوم قرار دارد}} \begin{cases} -1 < \sin x < 0 \to [\sin x] = -1 \\ -1 < \cos x < 0 \to [\cos x] = -1 \end{cases} \\ x \to \pi^- \xrightarrow{\text{کمان x در ربع دوم قرار دارد}} \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \to [\sin x] = 0 \\ -1 < \cos x < 0 \to [\cos x] = -1 \end{cases} \end{cases}$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{[\cos x]}{x}$ **را بیابید.**