

نام دبیر: معصومه نوربخش
نام آموزشگاه:
نام دوره:

نام درس: حسابان
مقطع و رشته: سوم ریاضی
شماره جلسه: بیستم

مبحث: همسایگی و حد

صفحه کتاب درسی:

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان										نام کتاب
										برای کلاس دبیر و کار در کلاس
										برای کار در منزل

برای بررسی حد تابع $f(x)$ در نقطه a ، لازم است x را از سمت راست و چپ به عدد a بسیار نزدیک کنیم. در واقع x ها همیشه در بازه ای که a وسط آن است قرار می گیرند. پس x ها در مجاورت یا همسایگی عدد a قرار دارند و به آن نزدیک می شوند. پس برای تعریف حد یک تابع در نقطه a ، حتما باید تابع در یک بازه ای اطراف a تعریف شده باشد.

تعریف: بازه های به صورت $(a - \delta, a + \delta)$ که در آن δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می نامند. در این صورت a را مرکز همسایگی و δ را شعاع آن می گویند.

از آنجایی که برای حدگیری، لزومی ندارد x ها به خود عدد a برسند، پس می توان a را از همسایگی فوق حذف کرده و آن را همسایگی محذوف a نامید.

تمرین: همسایگی محذوف به مرکز $x = 0$ و شعاع $\delta = 1$ را بنویسید.

تمرین: تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ در همسایگی کدام نقطه تعریف شده است؟

همسایگی راست و همسایگی چپ: همان گونه که در بررسی حد چپ و راست تابع آموختید، برای بررسی هر یک از حدود راست یا چپ، باید بتوان متغیر را از همان طرف به سمت a نزدیک نمود لذا داریم:

همسایگی راست: بازه های به صورت $(a, a + \delta)$ را یک همسایگی راست a می نامیم و اگر دامنه ای تابعی شامل یک همسایگی راست a باشد، گوئیم آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده است.

همسایگی چپ: برای بررسی حد چپ تابع f در نقطه ای مانند a ، متغیر x باید بتواند از چپ به a نزدیک شود. این به معنای آن است که دامنه ای f باید شامل بازه ای به صورت $(a - \delta, a)$ باشد، چنین بازه هایی را یک همسایگی چپ a می نامیم و در این حالت می گوئیم تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده است.

تمرین: تابع $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ در چه نقاطی فقط همسایگی راست یا چپ دارد؟ حد تابع را در این نقاط بررسی کنید.

نتیجه: شرط آن که بتوان از حد چپ تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد، آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد. به طور مشابه شرط آن که بتوان از حد راست تابعی در یک نقطه مانند a صحبت کرد، آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

قرار داد: اگر تابعی مانند f فقط در همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ به معنای } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ خواهد بود.}$$

به طور مشابه اگر f فقط در همسایگی چپ نقطه ای a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ به معنای

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ خواهد بود.}$$

تمرین: حد تابع $y = \sqrt{x-2}$ را در $x = 2$ بدست آورید.

تمرین: حد تابع $y = \frac{1}{[x]}$ را در $x = 0$ محاسبه کنید.

تمرین: مجموعه جواب نامعادله $\sin x - \cos x > 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ همسایگی کدام نقطه است؟