نام دبیر: معصومه نوربخش	**نام درس:** حسابان
نام آموزشگاه:	**مقطع و رشته:** سوم ریاضی
نام دوره:	**شماره جلسه:** نوزدهم

مبحث: مفهوم حد تابع – حد چپ وراست

صفحه کتاب درسی:

نام کتاب	تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان									
برای کلاس دبیر و کار در کلاس										
برای کار در منزل										

در بررسی رفتار یک تابع با ضابطه ی $y = f(x)$ ، گاهی لازم است بدانیم که اگر متغیر x به عددی مانند $x = a$ بسیار نزدیک شود(ولی هرگز دقیقا مقدار a را اختیار نکند) مقادیر $f(x)$ های متناظر، چگونه تغییر می کنند و مهم تر از این که آیا $f(x)$ ها به عدد خاصی مانند L نزدیک می شوند یا خیر.نتیجه ی بررسی مفهوم فوق در یک تابع منجر به عملیاتی می شود که به آن حدگیری می گوئیم.

تعریف: برای یک تابع مانند f اگر مقادیر x به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می شوند، گوئیم تابع f در نقطه ی a حد دارد و حد آن برابر L است و می نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.این عبارت به این معناست که با نزدیک شدن x به a ، فاصله ی $f(x)$ تا L از هر مقداری که بخواهیم کوچکتر می شود.

نتیجه: اگر منحنی تابع f در دسترس باشد، برای بررسی حد تابع در یک نقطه مانند a از روی نمودار f ، مقادیری از x را که عضو دامنه ی f هستند به نقطه ی a نزدیک می کنیم.اگر مقادیر $f(x)$ متناظر با آن ها روی نمودار به سمت عدد حقیقی مانند L نزدیک شوند، تابع f در نقطه ی a حد دارد ولی اگر به سمت عدد حقیقی مشخصی نزدیک نشوند تابع در نقطه ی a حد ندارد.

توجه: اگر ضابطه ی تابع f موجود باشد، برای بررسی حد تابع f در نقطه ی a ، می توانیم جدولی تشکیل دهیم و در آن مقادیری از x را که هم از راست و هم از چپ به a نزدیک می شوند قرار دهیم و سپس $f(x)$ متناظر با هر x را با استفاده از ضابطه ی تابع تعیین کنیم.اگر با نزدیک شدن مقادیر x به نقطه ی a ، مقادیر $f(x)$ متناظر با این x ها نیز به سمت عددی حقیقی مانند L نزدیک شوند می توانیم نتیجه بگیریم که تابع در $x = a$ حدی برابر L دارد.

تمرین: برای تابع $f(x) = 2x - 1$ با رسم جدول و نمودار آن، بررسی کنید وقتی مقادیر x به 1 نزدیک می شوند، مقدار تابع به چه عددی نزدیک می شود؟

محاسبه ی سرعت لحظه ای: اگر معادله ی مکان یک متحرک بر حسب زمان به صورت $x(t)$ داده شده باشد، برای محاسبه ی سرعت لحظه ای متحرک در لحظه ی t_1 ، کافی است سرعت متوسط متحرک را در دو لحظه ی t_1 و t_2 محاسبه نمود که در آن t_2 لحظه ای بسیار نزدیک به t_1 است و می توان آن را به صورت $t_2 = t_1 + h$ نوشت.بنابراین داریم: $V_{\text{متوسط}} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2 - t_1}$

تمرین: اگر معادله ی مکان متحرکی به صورت $x(t) = 2t^2 + t$ باشد، سرعت لحظه ای متحرک را در لحظه ی $t = 1$ بدست آورید.

همان طور که می دانید، حرکت متغیر x به سمت عدد a روی محور x ها می تواند از سمت چپ یا راست باشد:

الف) اگر متغیر x از سمت راست a ، یعنی با مقادیر بزرگتر از a به عدد a نزدیک شود، آن را با نماد $x \to a^+$ نمایش می دهیم.

ب) اگر متغیر x از سمت چپ a ، یعنی با مقادیر کوچکتر از a به عدد a نزدیک شود، آن را با نماد $x \to a^-$ نمایش می دهیم.

حد راست: در تابعی مانند f ، اگر با نزدیک شدن متغیر x با مقادیر بزرگتر از عدد a به a ، مقادیر f(x) به عددی حقیقی مانند L_1 نزدیک شوند، گوئیم تابع f(x) ، در نقطه ی x = a حد راست دارد و مقدار این حد برابر L_1 است.

حد چپ: در تابعی مانند f ، اگر با نزدیک شدن متغیر x با مقادیر کوچکتر از عدد a به a ، مقادیر f(x) به عددی حقیقی مانند L_2 نزدیک شوند، گوئیم تابع f(x) ، در نقطه ی x = a حد چپ دارد و مقدار این حد برابر L_2 است.

قضیه: هر گاه تابع f در هر دو طرف نقطه ی x = a تعریف شود همچنین ،در این صورت گوئیم تابع f در نقطه ی x = a حد دارد و مقدار آن برابر L است و می نویسیم: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

یعنی اگر حد های چپ و راست یک تابع در نقطه ای موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حد های چپ و راست است.بنابراین اگر یک تابع در نقطه ای حد های چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد.

تمرین: حد تابع |f(x) = |x را در نقطه ی x = 0 بررسی کنید.

حالت های عدم وجود حد:

1) **در حالتی که با نزدیک شدن x به عدد a ، مقادیر f(x) به عدد خاصی نزدیک نشوند، f(x) حد ندارد.**
2) **در حالتی که تابع f(x) در x = a حد چپ و راست نابرابر داشته باشد، f(x) در x = a حد ندارد.**

تمرین: با رسم تابع f(x) = x − [x] درباره ی حد این تابع در نقاط صحیح بحث کنید.