

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان										نام کتاب
										برای کلاس دبیر و کار در کلاس
										برای کار در منزل

به معادلاتی که متغیر های آن ها نسبت های چهار گانه ی مثلثاتی باشند، معادلات مثلثاتی می گویند. هدف از حل این معادلات مشخص کردن همه ی کمان هایی است که در معادله صدق می کنند. لذا برای حل هر معادله کافی است با استفاده از روابط مختلف مثلثاتی، آن را تا جایی ساده کنیم که به یکی از چهار حالت زیر برسیم. سپس ابتدا جواب کلی و بعد، جواب های خصوصی با قرار دادن مقادیر مختلف  $k \in \mathbb{Z}$  در جواب های کلی، بدست می آیند:

$$1) \sin x = k_1 \in [-1, 1] \xrightarrow{k_1 = \sin \alpha} \sin x = \sin \alpha \xrightarrow{\text{جواب های کلی}} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

تذکره: علت انتخاب دو جواب کلی فوق، آن است که چون در یک دور مثلثاتی، دو زاویه ی  $\alpha$  و  $\pi - \alpha$  دارای سینوسی برابر با  $k_1$  هستند پس ابتدا، محل این دو زاویه روی دایره ی مثلثاتی در نظر گرفته می شود و بعد با اضافه کردن مضارب زوج  $\pi$  به هر یک در واقع حرکت با دور های کامل مثلثاتی انجام می گیرد و در نتیجه، تمام کمان هایی که بر این دو محل واقع هستند مشخص می شوند.

تمرین: معادله ی  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  را حل کنید.

$$2) \cos x = k_2 \in [-1, 1] \xrightarrow{k_2 = \cos \beta} \cos x = \cos \beta \xrightarrow{\text{جواب های کلی}} x = 2k\pi \pm \beta$$

تمرین: جواب های کلی معادله ی  $\cos 5t = \cos t$  را بدست آورید.

برای سهولت کار می توان حل معادلات مثلثاتی را در دسته بندی های عمومی زیر قرار داد:

الف) معادلاتی که با اتحاد های مقدماتی حل می شوند.

ب) معادلاتی که با استفاده از نسبت های کمان های حل می شوند.

ج) معادلاتی که با استفاده از نسبت های حل می شوند.

د) معادلاتی که با استفاده از فرم معادله ی درجه دوم حل می شوند.

ه) معادلاتی که با استفاده از فرمول های تبدیل جمع به ضرب و یا ضرب به جمع نسبت های مثلثاتی حل می شوند.

و) معادلاتی که از ترکیب روابط فوق حل می شوند.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

1)  $2 \sin^2 x = \cos x + 2$

2)  $\cos 6t = \cos 5t \cdot \cos t$

3)  $2 \sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

4)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

5)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

معادلات خاص مثلثاتی: با کمی دقت در حل معادلات مثلثاتی نتیجه می گیریم که اکثرا حل معادلات مثلثاتی به شش معادله ی اصلی زیر منجر می شوند که به آن ها معادلات خاص مثلثاتی می گوئیم. لذا با نمایش همزمان محل جواب ها روی دایره و جواب های کلی، آن ها را به خاطر سپرده، از این به بعد در حل معادلات، مستقیما جواب آن ها را می نویسیم:

1)  $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \xrightarrow{\text{جواب های خصوصی در بازه } [0, 2\pi]} x = \{0, \pi, 2\pi\}$

2)  $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{جواب های خصوصی در بازه } [0, 2\pi]} x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

3)  $\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{جواب های خصوصی در بازه } [0, 2\pi]} x = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

4)  $\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{جواب های خصوصی در بازه } [0, 2\pi]} x = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

5)  $\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{\text{جواب های خصوصی در بازه } [0, 2\pi]} x = \{0, 2\pi\}$

6)  $\cos x = -1 \rightarrow x = (2k + 1)\pi \xrightarrow{\text{جواب های خصوصی در بازه } [0, 2\pi]} x = \{\pi\}$

تمرین: انتهای کمان جواب های معادله ی  $\cos 2x = \sin x$  بر روی دایره ی مثلثاتی، راس های چه مثلثی است؟