

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پرتکرار و تابستان

نام کتاب

برای کلاس دبیر و  
کار در کلاس

برای کار در منزل

**توابع چندجمله ای:** هر تابع به صورت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  که در آن  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  اعدادی حقیقی و  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_n \neq 0$  می باشد را یک تابع چندجمله ای از درجه  $n$  می نامند. می دانید هر تابع به فرم کلی  $y = ax^2 + bx + c$  یک چندجمله ای درجه دوم است که نمودار آن سهمی قائم نام دارد. حال لازم است بدانید که توابع با فرم کلی  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  موسوم به توابع درجه سوم هستند. ساده ترین تابع درجه سوم، تابع  $y = x^3$  می باشد.

**معرفی و بررسی تابع  $y = x^3$  و نمودار آن:** دامنه ی تابع  $f(x) = x^3$  برابر  $R$  است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدا مختصات متقارن است. با توجه به ضابطه ی تابع برای مقادیر مثبت  $x$  مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه ی آن را نسبت به مبدا مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر  $x_1 < x_2$  می توان نتیجه گرفت  $x_1^3 < x_2^3$ . با توجه به این که این تابع یک به یک است، پس وارون پذیر است و داریم:  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ .

### توابع پله ای و تابع جزء صحیح:

**جزء صحیح یک عدد حقیقی:** برای هر عدد حقیقی مانند  $x$ ، عدد صحیح و منحصر به فرد  $n$  و عدد  $0 \leq p < 1$  وجود دارد، به قسمی که  $x = n + p$  عدد صحیح  $n$  را با نماد  $[x]$  نشان می دهیم: در واقع  $[x]$ ، بزرگترین عدد صحیح نایبتر از  $x$  است.

**تابع  $y = [x]$ :** تابعی که به هر عدد حقیقی مانند  $x$ ، جزء صحیح آن را نسبت می دهد تابع جزء صحیح نام می گیرد و با  $f(x) = [x]$  نمایش داده می شود لذا باید بدانید:

- $[x] \leq x < [x] + 1$
- $x - 1 < [x] \leq x$
- $[x + k] = [x] + k$
- $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$

برای رسم  $y = [g(x)]$  باید محدوده ی  $x$  را به گونه ای انتخاب کنیم که بین دو عدد صحیح متوالی قرار بگیرد.

برای رسم توابع جزء صحیح خطی به فرم کلی  $y = [ax + b]$  لازم است ابتدا با توجه به ضریب  $x$  داخل جزء صحیح فواصلی به طول  $\frac{1}{|a|}$  برای  $x$  ها در نظر گرفته، سپس با محاسبه ی حدود، بین اعداد صحیح متوالی، ابتدا جزء صحیح را حذف نموده و در نهایت به رسم تابع اقدام کنیم.

**توابع متناوب:** حرکت هایی که الگوی خاصی را تکرار می کنند حرکت های متناوب می نامند. توابعی که بیان کننده ی این حکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آن ها را توابع های متناوب می نامند. تابع  $f$  را متناوب نامیم هر گاه یک عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم  $x + T \in D_f$  و  $f(x + T) = f(x)$ . کوچکترین عدد  $T$  با خاصیت بالا را دوره ی تناوب اصلی تابع  $f$  می نامند. از دیدگاه هندسی، دوره ی تناوب اصلی یک تابع، کوتاهترین فاصله ای است که ضمن عبور از آن، شکل اصلی نمودار تابع عینا تکرار می شود.

## نکات:

- (1) توابع  $y = \sin^{2n+1} ax$  و  $y = \cos^{2n+1} ax$  متناوب با دوره تناوب اصلی  $T = \frac{2\pi}{a}$  هستند.
- (2) توابع  $y = \sin^{2n} ax$  و  $y = \cos^{2n} ax$  متناوب با دوره تناوب اصلی  $T = \frac{\pi}{|a|}$  هستند.
- (3) توابع  $y = \tan^n ax$  و  $y = \cot^n ax$  متناوب هستند و دوره تناوب اصلی آن ها  $T = \frac{\pi}{|a|}$  می باشد.
- (4) اگر به کمک فرمول ها و رابطه های جبری یا مثلثاتی بتوانیم تابع  $f$  را ساده تر کنیم و دوره تناوب کوچکتری بدست آوریم  $C$  دوره تناوب کوچکتر، دوره تناوب اصلی تابع  $f$  خواهد بود.
- (5) اگر  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب اصلی  $T$  باشد،  $|f|$  نیز معمولاً متناوب و با دوره تناوب اصلی  $T$  یا  $\frac{T}{2}$  خواهد بود که باید با امتحان کردن در تابع  $|f|$ ، آن را مشخص نمود.
- (6) دوره تناوب هر یک از سه تابع  $y = A \sin ax + B \cos ax$  و  $y = \frac{A \sin ax}{B+k \sin ax}$  و  $y = \frac{A \cos ax}{B+k \cos ax}$  برابر است با  $T = \frac{2\pi}{|a|}$ .
- (7) هر عدد  $C \neq 0$  دوره تناوب تابع ثابت  $f(x) = a$  است ولی تابع ثابت دوره  $T$  تناوب اصلی ندارد. پس یک تابع متناوب لازم نیست دوره تناوب اصلی داشته باشد.
- (8) اگر تابع  $f(x)$  با دوره تناوب  $T_1$  و تابع  $g(x)$  با دوره تناوب  $T_2$ ، متناوب باشند تابع  $f(x) \pm g(x)$  متناوب با دوره تناوب  $[T_1, T_2]$  (ک.م.م  $T_1$  و  $T_2$ ) است.
- (9) اگر دوره تناوب تابع  $y = f(x)$  برابر با  $T$  باشد، آنگاه دوره تناوب تابع  $y = f(ax + b)$  برابر با  $\frac{T}{|a|}$  است.

تمرین: دوره تناوب اصلی تابع  $y = \sin^2 2x + \cos \frac{x}{3}$  چقدر است؟

تمرین: دوره تناوب اصلی تابع  $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} \cos x$  را تعیین کنید.

تمرین: دوره تناوب اصلی تابع  $y = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x$  را بیابید.