

تمرین از کتاب های درسی، آبی، پر تکرار و تابستان

نام کتاب

برای کلاس دبیر و کار در کلاس

برای کار در منزل

آشنایی با بازه و تابع: اگر فرض کنیم که $a < b$, $(a, b \in \mathbb{R})$ ، آنگاه مجموعه هایی از اعداد حقیقی با نام بازه را به شرح زیر تعریف می کنیم:

(1) بازه ی باز a و b :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

(2) بازه ی بسته ی a و b :

$$[a, b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

(3) بازه ی بسته ی a و باز b :

$$[a, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

(4) بازه ی باز a و بسته ی b :

$$(a, b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

بازه های نامتناهی: بازه هایی را گویند که حداقل از یک طرف نامحدود باشند.

(1) بازه ی باز a و مثبت بی نهایت:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

(2) بازه ی بسته ی a و مثبت بی نهایت:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

(3) بازه ی منفی بی نهایت و باز a :

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$

(4) بازه ی منفی بی نهایت و بسته ی a :

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$$

(5) بازه ی منفی بی نهایت و مثبت بی نهایت:

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

تعریف عمومی تابع: یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B ، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B

نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه ی A را دامنه و مجموعه ی B را هم دامنه یا مقصد تابع می نامیم و می نویسیم: $f: A \rightarrow B$

انواع روش های نمایش تابع:

1) نمایش تابع با نمودار ون (بیکانی): یک رابطه بین مجموعه ی A و مجموعه ی B، که با نمودار ون نمایش داده شده، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

دامنه و برد تابع: مجموعه ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعه ی A هستند) را دامنه و مجموعه ی تمام عضو هایی از مجموعه ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قرار می گیرند را برد تابع گوئیم. معمولاً، دامنه ی تابع f را با D_f و برد آنرا با R_f نمایش می دهیم.

2) نمایش تابع توسط زوج های مرتب: مجموعه ای از زوج های مرتب را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اول آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که در آن مولفه های اول، اعضای دامنه و مولفه های دوم، اعضای برد خواهند بود. به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده، می توان نوشت: $f = \{(x, y) | x \in D_f, R_f\}$

بنابراین در نمایش تابع به صورت زوج مرتب، اگر زوج های متب دارای مولفه ی اول برابر باشند، باید مولفه ی دوم آنها نیز برابر باشند.

تمرین: اگر مجموعه ی $\{(2, \alpha - \beta), (2, 3), (1, \alpha + \beta), (1, -1)\}$ تابع باشد، α و β کدام اند؟

3) نمایش تابع با جدول: نمایش جدولی تابع، همان نمایش زوج مرتبی است که در جدولی افقی یا عمودی، مقادیر x ها (دامنه) و y ها (برد)، ثبت شده باشند.

4) نمایش تابع توسط نمودار آن: اگر مجموعه ی f، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(x, y) \in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دو بعدی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط مانند $A(x_A, y_A)$ نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

5) نمایش یک تابع از طریق ضابطه: برای تابع f که از مجموعه ی A به مجموعه ی B تعریف شده، رابطه ای که هر x (عضو A) را به y متناظرش (عضو B) مرتبط می کند، ضابطه (قانون) تابع f گوئیم و با نماد کلی: عبارتی بر حسب $y = f(x) = x$ نمایش می دهیم.

شرط تابع بودن از دیدگاه ضابطه: در یک رابطه بین دو متغیر x و y هنگامی y یک تابع بر حسب x است که در آن به ازای هر x، بیش از یک y حاصل نشود. یعنی تعریف مقابل برقرار باشد:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f, x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$$

تمرین: کدام یک از ضابطه های زیر یک تابع را مشخص می کند؟

$$y = x^2 \text{ (الف)}$$

$$y^2 = x \text{ (ب)}$$

مشخص کردن توابع از طریق معادلات: گاهی برای تابع f ، رابطه‌ی صریحی به صورت $y = f(x)$ موجود نیست، لذا لازم است ابتدا y را بر حسب x بدست آورده، سپس تابع بودن آنرا بررسی کنیم.

تمرین: آیا رابطه‌ی $x^2 + y^2 = 25$ یک تابع می باشد؟

نکته: معمولا رابطه‌هایی که در آنها y با توان زوج وجود دارد یا y درون قدرمطلق یا جزء صحیح قرار گرفته و یا y برابر با $\pm f(x)$ باشد، تابعی از x به y نخواهد بود مگر در موارد استثناء.

شرط تابع بودن روابط با چند ضابطه: برای آن که یک رابطه با چند ضابطه تابع باشد، باید:

اولا: همه‌ی ضابطه‌ها در دامنه‌ی خود تابع باشند.

ثانیا: اشتراک دو به دوی دامنه‌ها تهی باشد و یا اگر دامنه‌ها اشتراک داشته باشند، به ازای آن x ‌های مشترک یک مقدار برای y از ضابطه‌های مربوطه حاصل شود.

6) نمایش تابع به صورت یک ماشین: ورودی x ، تحت اثر عملیات f قرار میگیرد و خروجی y حاصل می شود. این ماشین متناظر با عملکرد

ضابطه‌ی $y = f(x)$ خواهد بود و اصطلاحا تابعی از x به y را نمایش می دهد.